ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΙΩ. ΔΑΡΑ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΗΣ

ΤΟΜΟΣ 2ΟΣ
ΒΙΒΛΙΟ 2ο :
ΘΕΑΤΡΟ ΠΥΡΑΥΛΙΚΗΣ ΑΜΥΝΑΣ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΑΧΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΞΑΓΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΕΤΕΡΟΓΕΝΩΣ ΟΠΛΙΣΜΕΝΩΝ ΤΑΚΤΙΚΩΝ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΛΕΓΧΟΥ ΟΠΛΩΝ

www.armscontrol.info

-2007-

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
2ου ΒΙΒΛΙΟΥ
2ου ΤΟΜΟΥ

Κεφάλαιο 7 **5**

ΘΕΑΤΡΟ ΠΥΡΑΥΛΙΚΗΣ ΑΜΥΝΑΣ

7.1 Η Έννοια του Θεάτρου Πυραυλικής Άμυνας (TMD) 5

7.2 Η Πιθανότητα της Διεισδυτικότητας των Επιτιθεμένων Εισβολέων (Εχθρικών Πυραύλων ή Κεφαλών ή Αρμάτων) δια μέσου όλων των Ζωνών Άμυνας 8

7.2.Α. Οι Βασικοί Τύποι των Αμυντικών Τακτικών 8

7.2.Β. Η Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης 10

7.2.Β.i. Η Πιθανότητα Εξουδετέρωσης των Στόχων με την Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης 10

7.2.Β.ii. Εφαρμογή της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης εντός Άμυνας σε Βάθος 14

7.2.Γ. Η Τακτική της Ομοιόμορφης Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης 21

7.2.Γ.i. Η Πιθανότητα Εξουδετέρωσης των Στόχων με την Τακτική της Ομοιόμορφης Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης 21

7.2.Γ.ii. Εφαρμογή της Τακτικής της Ομοιόμορφης Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης εντός Άμυνας σε Βάθος 24

7.2.Δ. Η Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" 28

7.2.Δ.i. Η Πιθανότητα Εξουδετέρωσης των Στόχων με την Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" 28

7.2.Δ.ii. Εφαρμογή της Τακτικής της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" εντός Άμυνας σε Βάθος 34

7.3 Η Πιθανότητα Πλήρους Αποτροπής της Εισόδου Επιτιθεμένων Εισβολέων (Εχθρικών Πυραύλων ή Κεφαλών ή Αρμάτων) 36

Βιβλιογραφία **43**

Κεφάλαιο 8 **44**
ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΑΧΩΝ ΠΟΥ ΔΙΕΞΑΓΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΕΤΕΡΟΓΕΝΩΣ ΟΠΛΙΣΜΕΝΩΝ ΤΑΚΤΙΚΩΝ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

8.1 Αριθμητική Επίλυση Αιτιοκρατικού Μοντέλου Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά 45
8.2 Συνάθροιση Δυνάμεων 59
8.3 Παράμετροι Υπεροχής 62
8.4 Αναγωγή του Προβλήματος στην Επίλυση Εξισώσεων με Συναθροίσεις Δυνάμεων 83
8.5 Αριθμητικά Παραδείγματα σε διάφορες περιπτώσεις Μάχης <<Ενός Εναντίον Δύο>> με Στοχευμένα Πυρά 87
8.6 Αριθμητική Επίλυση Αιτιοκρατικού Μοντέλου Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Πυρά Περιοχής 92
8.7 Αριθμητική Επίλυση Αιτιοκρατικού Μοντέλου Ανταρτοπόλεμου που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων 101
8.8 Βέλτιστη Τοποθέτηση των Αμυντικών Δυνάμεων **110**
8.8.Α.Στοιχειώδεις Τύποι Αμυντικών Στρατηγικών 110
8.8.Β.Βέλτιστη Μετακινούμενη Άμυνα όταν ο Αντίπαλος επιχειρεί να διεισδύσει από ένα σημείο του Διαστήματος της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου 114
8.8.Β.i. Η Περίπτωση κατά την οποία η Ταχύτητα Μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την Ταχύτητα Μετακίνησης της Αμυνόμενης 117
8.8.Β.ii. Η Περίπτωση κατά την οποία η Ταχύτητα Μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι μικρότερη από την Ταχύτητα Μετακίνησης της Αμυνόμενης 122
8.8.Β.iii. Η Περίπτωση κατά την οποία η Ταχύτητα Μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι μεγαλύτερη από την Ταχύτητα Μετακίνησης της Αμυνόμενης 127
8.8.Γ.Βέλτιστη Τοποθέτηση των Αμυντικών Δυνάμεων σε Μετακινούμενη Άμυνα όταν ο Αντίπαλος επιχειρεί να διεισδύσει από διαφορετικά σημεία της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου 133

Βιβλιογραφία **142**

Κεφάλαιο 7
Θέατρο Πυραυλικής Άμυνας

Το παρόν έβδομο *Κεφάλαιο* θα δώσει μία περιγραφή της συνολικής αποτελεσματικότητας μίας Άμυνας σε Βάθος εναντίον Βαλλιστικών Πυραύλων η οποία προτείνεται για την << *Εθνική Βαλλιστική Πυραυλική Άμυνα* (: National Ballistic Missile Defense (NBMD)) των Η. Π. Α.>> και το << *Θέατρο Πυραυλικής Άμυνας* (: Theater Missile Defense (TMD)) των Η. Π. Α.>>. Η ανάλυση που θα πραγματοποιηθεί αποτελεί μία επέκταση της έννοιας της Στρατηγικής Άμυνας εναντίον Βαλλιστικών Πυραύλων που συζητήθηκε στο προηγούμενο *Κεφάλαιο 6*.

Τρεις διαφορετικές Τακτικές Σκόπευσης των Στόχων θα συζητηθούν στην περίπτωση που η Άμυνα οργανώνεται κατά την έννοια του Θεάτρου της Πυραυλικής Άμυνας εναντίον Πυραύλων ή εναντίον Τεθωρακισμένων: (1) *Τακτικές Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης* (Random Tactics), (2) *Ομοιόμορφες Τακτικές Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης* (:Uniform Tactics) και (3) *Τακτικές Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"* (:Shoot-Look-Shoot Tactics). Γενικά, προτιμάται η εφαρμογή των δύο πρώτων Τακτικών σε Προωθητικά Πυραυλικά Συστήματα Αναχαίτισης (:rocket-propelled interceptors), ενώ η τρίτη Τακτική χρησιμοποιείται κυρίως σε Οπλικά Συστήματα Κατευθυνόμενης Ενέργειας. Για λόγους καλύτερης παρουσίασης των εννοιών, θα δώσουμε μία λεπτομερή σύγκριση μεταξύ των δύο πρώτων Τακτικών τόσο στην περίπτωση Άμυνας σε Βάθος με ένα Στρώμα Άμυνας όσο και στην περίπτωση Άμυνας σε Βάθος με δύο Στρώματα Άμυνας. Επιπρόσθετα, θα εξετασθεί ιδιαιτέρως η πιθανότητα κατά την οποία κανένας από τους Επιτιθέμενους Πυραύλους δεν θα μπορέσει να εισέλθει σε προστατευμένη από Άμυνα σε Βάθος περιοχή.

7.1.Η Έννοια του Θεάτρου Πυραυλικής Άμυνας (TMD)

Η έννοια της Άμυνας σε Βάθος που περιγράψαμε στο *Κεφάλαιο 6*, για την αντιμετώπιση Επίθεσης από Βαλλιστικούς Πυραύλους (ή ακόμη Επίθεσης από Άρματα ή Αεροσκάφη όταν το κάθε ένα από αυτά χρησιμοποιεί Οπλικές Κεφαλές), μπορεί επίσης να εφαρμοσθεί και για την αντιμετώπιση Επίθεσης από Βαλλιστικούς Πυραύλους μικρότερου βεληνεκούς ή για την αντιμετώπιση Πυρών Περιπολίας μέσα σ' ένα Θέατρο (Στρατιωτικών) Επιχειρήσεων είτε μέσα στο σύνθετο περιβάλλον Μαχών Ξηράς/Αέρος.

Μέχρι πρόσφατα, στις Η. Π. Α., οι κυριότερες κατευθύνσεις Ερευνητικών Αμυντικών Προγραμμάτων σχετικών προς την οργάνωση μίας Άμυνας σε Βάθος (για την αντιμετώπιση Επίθεσης από Βαλλιστικούς Πυραύλους μικρότερου βεληνεκούς ή για την αντιμετώπιση Πυρών Περιπολίας μέσα σ' ένα Θέατρο (Στρατιωτικών) Επιχειρήσεων είτε μέσα στο σύνθετο περιβάλλον Μαχών Ξηράς/Αέρος) διακρίνονταν σε δύο κατηγορίες σχεδιασμού:

- την << ***Εθνική Πυραυλική Άμυνα*** (: National Missile Defense (NMD)) των Η. Π. Α.>>

και

- το << ***Θέατρο Πυραυλικής Άμυνας*** (: Theater Missile Defense (TMD)) των Η. Π. Α.>>.

Το πρώτο από τα Προγράμματα είχε σχεδιαστεί για την Αναχαίτιση Πυραύλων μεγάλου και μέσου βεληνεκούς, ενώ το δεύτερο για την Αναχαίτιση Πυραύλων μικρού βεληνεκούς. Έτσι, το 1999, οι Η. Π. Α. εφάρμοζαν, για την Αμυντική τους θωράκιση, μία παραλλαγή του Θεάτρου Πυραυλικής Άμυνας στην οποία χρησιμοποιούνταν Συστήματα Πυραύλων Patriot. Στην παραλλαγή αυτή δεν χρησιμοποιούταν κανένα από τα προηγμένα Οπλικά Συστήματα που μπορούν τώρα να εφαρμόζονται στους σύγχρονους σχεδιασμούς του Θεάτρου Πυραυλικής Άμυνας και που τώρα αναπτύσσονται.

Ωστόσο, είχε γίνει από τότε σαφές ότι κάθε μελλοντικός (επανα)σχεδιασμός της Εθνικής Πυραυλικής Άμυνας των Η. Π. Α. θα πρέπει να εγκολπώνεται υποχρεωτικά και τις εκάστοτε εξελίξεις των TMD Συστημάτων (δηλαδή των Οπλικών Συστημάτων που εφαρμόζονται στους σχεδιασμούς του Θεάτρου Πυραυλικής Άμυνας): με την θεαματική ανάπτυξη που παρουσιάζουν οι Κλάδοι της ***Πυραυλικής Τεχνολογίας***, των ***Συστημάτων Υποστήριξης Αναζήτησης και Προσδιορισμού Στόχου*** και τέλος των ***Συστημάτων Παρακολούθησης και Ελέγχου***, είναι βέβαιο ότι τα μελλοντικά τα Συστήματα TMD θα καταστούν ικανά να συνιστούν μία οριακή Άμυνα εναντίον Διηπειρωτικών ή Διακρατικών Πυραύλων.

Κατά την παρούσα χρονική στιγμή, οι κυριότερες κατευθύνσεις Αμυντικών Προγραμμάτων των Η. Π. Α. περί θεμάτων που αφορούν στα TMD Συστήματα καθώς και στον σχεδιασμό του Θεάτρου Πυραυλικής Άμυνας. διακρίνονται στις ακόλουθες πέντε μεγάλες κατηγορίες:

1) <<***Αναβαθμισμένη Απόδοση Πυραύλων PATRIOT-3*** (PATRIOT Advanced Capability (PAC-3))>>,

2) <<***Θέατρο Πυραυλικής Ναυτικής Άμυνας*** (Navy Area Theater Ballistic Missile Defense (TBMD)>>,
3) <<***Θέατρο Πυραυλικής Άμυνας σε Μεγάλο Ύψος*** (Theater High-Altitude Area Defense (THAAD)>>,
4) <<***Πολεμικό Ναυτικό, Εκτεταμένο Θέατρο Πυραυλικής Άμυνας και Μέση Επέκταση του Αεροπορικού Συστήματος Άμυνας*** (Navy, Theater Wide, Medium Extended Air Defense System (MEADS))>>, και
5) <<***Εναέρια Όπλα Ρίψης Ακτίνων LASER*** (Space Based LASER (SBL))>>.

Οι πέντε αυτές μεγάλες κατηγορίες Αμυντικών Προγραμμάτων των Η. Π. Α. συνοψίζονται στον επόμενο Πίνακα:

No	Όνομα Συστήματος	Τύπος Κεφαλής	Ακτίνα Αμυνόμενης Περιοχής
	ΑΜΥΝΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΑ ΕΝΤΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΩΤΕΡΗΣ ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΑ ΚΛΙΜΑΚΑΣ		
(1)	*Πύραυλοι PATRIOT PAC-2*	Εκρηκτικός	10-15 km
	Πύραυλοι PATRIOT PAC-3	Προσβολή Στόχου	40-50 km
(2)	*Πύραυλοι Θεάτρου Ναυτικής Άμυνας (TBMD)*	Διάσπαση σε Μικρότερα Εκρηκτικά Μέρη	50-100 km
	ΑΜΥΝΑ ΣΕ ΣΗΜΕΙΑ ΕΝΤΟΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΑ ΚΛΙΜΑΚΑΣ		
(3)	*Πύραυλοι Θεάτρου Άμυνας σε Μεγάλο Ύψος (THAAD)*	Προσβολή Στόχου	>100 km
(4)	*Πύραυλοι Εκτεταμένου Θεάτρου και Αεροπορικό Σύστημα Άμυνας (MEADS)*	Προσβολή Στόχου	>300 km
	ΕΝΑΕΡΙΑ ΑΜΥΝΑ		
(5)	*Επιθετικό Αεροσκάφος* YAL-1A	Ακτίνες LASER	>300 km

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.

VII.1. Παρατήρηση. Παράδειγμα Εναέριου Όπλου Ρίψης Ακτίνων LASER αποτελεί το Επιθετικό Αεροσκάφος LASER YAL-1A το οποίο προέρχεται από μία μετατροπή του γνωστού μας Επιβατικού Αεροσκάφους της Πολιτικής Αεροπορίας *Boeing 747*! Το εν λόγω Επιθετικό Αεροσκάφος είναι το πρώτο Εναέριο Επιχειρησιακό Οπλικό Σύστημα Υψηλής Ενέργειας Ακτίνων LASER που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καταστροφή (ή εξουδετέρωση) των ***εντός του Θεάτρου Βαλλιστικών Πυραύλων*** (: Theater Ballistic Missile (TBMs)) είτε κατά την φάση προετοιμασίας της εκτόξευσής τους είτε κατά την πτητική τους πορεία, όταν οι εντός του Θεάτρου Βαλλιστικοί αυτοί Πύραυλοι επιδεικνύουν την παρουσία τους με ιδιαίτερα φωτεινή λάμψη και βρίσκονται κάτω από τρομακτικές δυναμικές πιέσεις που τους καθιστούν ευάλωτους σε προσβολή από Ακτίνες LASER. Το ως άνω Εναέριο Επιχειρησιακό Οπλικό Σύστημα Υψηλής Ενέργειας Ακτίνων LASER μπορεί να στοχεύσει από εκατοντάδες μίλια μακριά τους TBMs (δηλαδή τους εντός του Θεάτρου Βαλλιστικούς Πυραύλους). Επί πλέον μπορεί να ίπταται συνεχώς υπεράνω του οικείου εδάφους με σκοπό την ανά πάσα στιγμή καταστροφή (ή εξουδετέρωση) των TBMs. Τέλος, αναφέρουμε ότι το συγκεκριμένο Όπλο είναι ένα Όπλο LASER Χημικού Οξυγόνου-Ιωδίου (:Chemical Oxygen-Iodine Laser (COIL)), το οποίο περιλαμβάνει 14 επί μέρους μονάδες COIL και διαθέτει αρκετά χημικά καύσιμα για να επιτελέσει την καταστροφή (ή εξουδετέρωση) 20-40 TBMs (δηλαδή, 20-40 εντός του Θεάτρου Βαλλιστικών Πυραύλων). ■

7.2. Η Πιθανότητα της Διεισδυτικότητας Επιτιθεμένων Εισβολέων (Εχθρικών Πυραύλων ή Κεφαλών ή Αρμάτων) δια μέσου όλων των Ζωνών Άμυνας

7.2.Α. Οι Βασικοί Τύποι των Αμυντικών Τακτικών

Σ'ένα Θέατρο Πυραυλικής Άμυνας, υπάρχουν τρεις κυρίως Τακτικές (:τρόποι) Σκόπευσης των Στόχων οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν:

1) η ***Τακτική της Τυχαίας Κατανομής (*** ή ***Τακτική της Τυχαίας Δέσμευσης*** ή ***Τακτική των Τυχαίων Δεσμεύσεων) των Πυρών Σκόπευσης*** (: Random Target Assignment),
2) η ***Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής (*** ή ***Ομοιόμορφη Τακτική Δέσμευσης*** ή ***Ομοιόμορφη Τακτική Δεσμεύσεων) των Πυρών Σκόπευσης*** (:Uniform Target Assignment),

και

3) η ***Τακτική της Κατανομής (των Δεσμεύσεων) των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"*** (: "Shoot-Look-Shoot" Target Assignment).

Στην Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών, οι Στόχοι (που μπορεί να είναι Πύραυλοι είτε Τεθωρακισμένα Οχήματα (δηλαδή Τανκς)) σκοπεύονται κατά "άτακτο τρόπο". Αυτό σημαίνει πως στην περίπτωση αυτή, η συνολική συντεταγμένη προσπάθεια που γίνεται είναι πολύ μικρή ή τελειώς ανύπαρκτη. Ειδικότερα, ***εάν υιοθετηθεί η Τακτική της ΤυχαίαςΚατανομής, τότε οι μεμωνομένοι Στόχοι σκοπεύονται ευθύς ως οι θέσεις τους εμφανιστούν μέσα στα οικεία Συστήματα Ραντάρ***.

Στην Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής των Πυρών, το σχέδιο του συνολικού τρόπου αμυντικής αντίδρασης προβλέπει την εκδήλωση συντεταγμένης επίθεσης με Πυρά Σκόπευσης κατά του Εισβολέα, για πρώτη φορά, πριν από την στιγμή κατά την οποία οι Αμυντικοί Πύραυλοι (Αναχαιτιστές) πυροβοληθούν από τον Εισβολέα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα κάθε μη αναγκαίας αναδίπλωσης των Αναχαιτίσεων. Όπως θα αποδείξουμε στην συνέχεια, ***κατ' αρχήν, η Ομοιόμορφη Τακτική είναι πολύ περισσότερο αποτελεσματική από την Τακτική της ΤυχαίαςΚατανομής***.

Ο τρίτος τύπος Τακτικής, δηλαδή αυτός της Τακτικής της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος", είναι, πολλές φορές, και ο πλέον αποτελεσματικός τρόπος Αμυντικής Αντίδρασης. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, μετά την απόκτηση των Στόχων, οι Αμυντικοί Πύραυλοι (Αναχαιτιστές) που θα εκτοξευθούν πυροβολούνται και αμέσως γίνεται μία αποτίμηση και διευθέτηση της όποιας επελθούσης Ζημίας. Εάν κάποιος Στόχος δεν έχει καταστραφεί, τότε ένας άλλος Αμυντικός Πύραυλος (Αναχαιτιστής) θα εκτοξευθεί εναντίον του ιδίου Στόχου. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί ότι

μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα καθυστέρησης μεταξύ της απόκτησης του Στόχου και της διευθέτησης αποτίμησης και διευθέτησης της Ζημίας. Το χρονικό αυτό διάστημα μπορεί να είναι καθοριστικά επώδυνο στην περίπτωση Αμυντικής Αντίδρασης εναντίον Βαλλιστικών Πυραύλων. Όμως, ***στην περίπτωση των στατικών Στόχων, ή ακόμα και στην περίπτωση Στόχων κινούμενων με μικρή ταχύτητα (όπως είναι τα Τανκς), η Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" αποδεικνύεται πως είναι η η πλέον αποτελεσματική μέθοδος για Αναχαιτίσεις με Πυραύλους***. Επίσης, ***στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται Όπλα Άμεσης Ενέργειας (όπως είναι τα Όπλα Ακτίνων LASER) η Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος αποτελεί την βέλτιστη επιλογή***.

Εάν επιλεγεί η Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών ή η Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής των Πυρών, τότε η ολική Αμυντική Αποτελεσματικότητα μπορεί να βελτιωθεί με την χρήση μίας Άμυνας σε Βάθος.

Στις επόμενες *Παραγράφους* θα παρουσιασθεί μία λεπτομερής ανάλυση των ανωτέρω θεωρήσεων σε Άμυνα μίας Ζώνης καθώς και σε Άμυνα δύο Ζωνών, συμπεριλαμβανομένης και μίας ανάλυσης της περίπτωσης που η πιθανότητα κατά την οποία ένας Επιτιθέμενος Πύραυλος (ή Επιτιθέμενο Τανκ) θα καταφέρει να διέλθει δια μέσου όλων των Αμυντικών Ζωνών είναι μηδενική.

7.2.Β. Η Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης

7.2.Β.i. Η Πιθανότητα Εξουδετέρωσης των Στόχων με την Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης

Στην παρούσα *Υποπαράγραφο*, θα συζητήσουμε την πιθανότητα κατά την οποία κάποιοι από M Εισβολείς (π.χ. Επιτιθέμενους Πυραύλους ή Κεφαλές) θα κατορθώσουν να μην καταστραφούν από N "άτακτες" (: σχεδιασμένες στην τύχη) Αναχαιτίσεις που επιχειρούνται εναντίον τους μέσα σε μία (Μονοζωνική) Άμυνα.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, είναι σαφές ότι ***η πιθανότητα κατά την οποία μία αυθαιρέτως επιλεγείσα "άτακτη" Αναχαίτιση δεσμεύεται και επιτυγχάνει να καταστρέψει έναν μεμονωμένο εισερχόμενο Στόχο ισούται με το γινόμενο της πιθανότητας*** $(1/M)$ ***Δέσμευσης του ως άνω Στόχου ανάμεσα στους*** M ***επιτιθέμενους Πυραύλους*** **(**ή ***Κεφαλές*****)** ***επί την πιθανότητα*** p ***καταστροφής του εν λόγω Στόχου από μία Αναχαίτιση εναντίον του***, δηλαδή:

$$p/M\ .$$

Έπεται αμέσως ότι ***η πιθανότητα κατά την οποία ο μεμονωμένος αυτός εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει την καταστροφή από μία "άτακτη" Αναχαίτιση είναι***

$$1-\frac{p}{M}\ .$$

Κατ' ακολουθία, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

VII.2.Πρόταση. ***Η πιθανότητα*** $p_{\mu\kappa}^{(\tau)}$ ***κατά την οποία ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει την καταστροφή και από τις*** N ***"άτακτες" Αναχαιτίσεις δίνεται από τον Τύπο:***

$$p_{\mu\kappa}^{(\tau)}=\left(1-\frac{p}{M}\right)^{N}. \qquad (1)$$

(Ο δείκτης $\mu\kappa$ δηλώνει την Μη Καταστροφή του Στόχου, ενώ ο δείκτης (τ) τον χαρακτήρα της Τυχαίας Κατανομής Δεσμεύσης των Πυρών.) Επί πλέον, ***ο αναμενόμενος αριθμός των εισερχομένων Στόχων που θα διαφύγουν την καταστροφή και από τις*** N ***"άτακτες" Αναχαιτίσεις δίνεται από τον Τύπο:***

$$E_{\mu\kappa}^{(\tau)}=p_{\mu\kappa}^{(\tau)}M=M\left(1-\frac{p}{M}\right)^{N}.\blacksquare \qquad (2)$$

Επειδή η ποσότητα p/M είναι συνήθως πολύ μικρή σε σύγκριση με την μονάδα, η έκφραση του *Τύπου* (1) στην παραπάνω *Πρόταση* μπορεί να αντικατασταθεί από μία εκθετική έκφραση. Πράγματι, συγκρίνοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$p_{\mu\kappa}^{(\tau)} = 1 - \frac{N}{1!}\frac{p}{M} + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{p}{M}\right)^2 - \cdots + \left(\frac{p}{M}\right)^N$$

της συνάρτησης $p_{\mu\kappa}^{(\tau)} = (1-[p/M])^N$ στην έκφραση του *Τύπου* (1) με το εκθετικό ανάπτυγμα

$$\exp\left(-\frac{pN}{M}\right) = 1 - \frac{N\,p}{M} + \frac{1}{2!}\left(\frac{N\,p}{M}\right)^2 - \cdots,$$

βλέπουμε ότι

$$p_{\mu\kappa}^{(\tau)} \cong p_{\mu\kappa}^{(\tau)*} := \exp\left(-\frac{p\,N}{M}\right). \qquad (3)$$

Η υπεροχή της χρήσης της προσεγγιστικής *Σχέσης* (3) έναντι της *Σχέσης* (1) έγκειται στο ότι η *Σχέση* (3) περιέχει και τις δύο μεταβλητές N και M μέσα σε μία θέση (: στην παράσταση (N/M)), σε αντίθεση με την *Σχέση* (1) που διαχωρίζει τις δύο μεταβλητές N και M σε διαφορετικές θέσεις.

Επί πλέον, η προσεγγιστική *Σχέση* (3) είναι ικανοποιητικά ακριβής για μεγάλες τιμές των N και M. Όταν, για παράδειγμα, $2 < (N/M) < 4$ με $M > 30$, το σφάλμα που θα προέλθει από την εφαρμογή της προσεγγιστικής *Σχέσης* (3) αντί της *Σχέσης* (1) είναι μικρότερο από 0.0044, ενώ, όσο μεγαλύτερη γίνεται η τιμή του M τόσο το σφάλμα αυτό μικραίνει περαιτέρω. Αντιθέτως, για μικρές τιμές των N και M, πρέπει να χρησιμοποιείται η ακριβής *Σχέση* (1).

VII.3. Παρατήρηση. Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα $p_{\mu\kappa}^{(\tau)}(i)$ κατά την οποία ακριβώς i το πλήθος Στόχων από τους M συνολικά εισελθόντας δεν θα καταστραφούν από τις N "άτακτες" Αναχαιτίσεις δίνεται από τον *Τύπο* (:[Thomas, 1956] THOMAS, C. J.: "The Estimation of Bombers Surviving an Air Battle ", *The Assistant for Operations Analysis*, *Deputy Chief of Staff*, *Operations*, *Headquarters*, U.S.Air Force, TM-49,Aug. 1956)

$$p_{\mu\kappa}^{(\tau)}(i)=\binom{M}{i}\sum_{j=0}^{M-i}(-1)^j\binom{M-i}{j}\left[1-(i+j)\frac{p}{M}\right]^N,(i=0,1,\ldots,M).\blacksquare \qquad (4)$$

VII.4. Παρατήρηση. Μία ειδικότερη παραλλαγή της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία $n(<N)$ Αντεπιθέσεις της Αμυνόμενης Πλευράς σφραγίζονται τυχαίως, και ανεξαρτήτως μεταξύ τους, εναντίον n αντίστοιχων Στόχων εκ των εισερχομένων M Επιτιθέμενων Εισβολέων, έτσι ώστε σε κάθε μία από τις n αυτές Αντεπιθέσεις να μπορούν να επιχειρηθούν ακριβώς j Κτυπήματα (: $N=n\,j$) όλα δεσμευμένα κατά του ιδίου Στόχου. Τότε, βάσει του *Τύπου* (1), η πιθανότητα $\Pi_{\mu\kappa}^{(\tau)}$, κατά την οποία ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα κατορθώσει να διαφύγει την καταστροφή (από όλα τα κτυπήματα που θα επιχειρηθούν εναντίον του σε μία από τις ως άνω σφραγισθείσες Αντεπιθέσεις), δίνεται από τον *Τύπο*:

$$\Pi_{\mu\kappa}^{(\tau)}=\left(1-\frac{p_j}{M}\right)^n$$

όπου

$$p_j=1-(1-p)^j$$

είναι η πιθανότητα διαφυγής της καταστροφής από όλα τα j Κτυπήματα που θα επιχειρηθούν κατά του Στόχου σε μία Αντεπίθεση. ■

7.2.B.ii.Εφαρμογή της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης εντός Άμυνας σε Βάθος

Θα μελετήσουμε, κατ' αρχάς, την περίπτωση μίας Μονοζωνικής Άμυνας δηλαδή την περίπτωση κατά την οποία ***η Άμυνα αποτελείται από μία μόνον Ζώνη η οποία συνίσταται στην εκδήλωση N "ατάκτων" (: σχεδιασμένων στην τύχη) Αναχαιτίσεων εναντίον M Επιτιθεμένων Πυραύλων (ή Κεφαλών)***. Πρόκειται βεβαίως για την χειρότερη και στοιχειωδέστερη των Αμυντικών Τακτικών, που, ωστόσο, μπορεί να θεωρείται ως ένα ***πρώτο*** μέτρο της αποτελεσματικότητας της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σε σύγκριση με την Ομοιόμορφη Τακτική της Κατανομής των Πυρών, καθώς και με την Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος".

Όπως είδαμε στην *Εξίσωση* (2) της σελίδας 159 του 1ου Βιβλίου του 2ου Τόμου, ο αναμενόμενος αριθμός Επιτιθεμένων Εισβολέων που θα διαπεράσουν από τις πρώτες j Ζώνες Άμυνας δίνεται από τον *Τύπο*:

$$M_j\left(D_1, D_2, \ldots, D_j\right) = M_{j-1} \exp\left(-\frac{D_j}{M_{j-1}}\right),$$

όπου ιδιαιτέρως το σύμβολο:

$$M_0$$

είναι ο Δείκτης του Επιθετικού Δυναμικού, ή απλά Ολικό Επιθετικό Δυναμικό, των Εισβολέων και εδώ ισούται με M .

Ιδιαιτέρως,

στην περίπτωση κατά την οποία η Άμυνα αποτελείται από μία μόνον Ζώνη η οποία συνίσταται στην εκδήλωση N "ατάκτων" (: σχεδιασμένων στην τύχη) Αναχαιτίσεων εναντίον M Επιτιθεμένων Πυραύλων (ή Κεφαλών), ο ανωτέρω Τύπος γίνεται

$$M_1 = M \exp\left(-\frac{p\,N}{M}\right), \qquad (5a)$$

όπου p είναι η πιθανότητα μία μεμονωμένη Αναχαίτιση να καταστρέψει έναν Επιτιθέμενο Πύραυλο (ή Κεφαλή) και όπου ο δείκτης 1 χρησιμοποιείται για να δηλώσει το πρώτο (και μοναδικό) Στρώμα Άμυνας.

Έτσι, έχουμε το εξής απλό αποτέλεσμα:

VII.5.Πρόταση. ***Στην περίπτωση κατά την οποία η Άμυνα αποτελείται από μία μόνον Ζώνη η οποία συνίσταται στην εκδήλωση N "ατάκτων" (: σχεδιασμένων στην τύχη) Αναχαιτίσεων εναντίον M Επιτιθεμένων Πυραύλων (ή Κεφαλών), η πιθανότητα Διέλευσης M_1 Πυραύλων (ή Κεφαλών) δια μέσου του μοναδικού Στρώματος Άμυνας ισούται με***

$$\frac{M_1}{M} = \exp\left(-\frac{p\,N}{M}\right), \qquad (5b)$$

όπου p είναι η πιθανότητα μία μεμονωμένη Αναχαίτιση να καταστρέψει έναν Επιτιθέμενο Πύραυλο (ή Κεφαλή). ■

Θα περάσουμε τώρα στην περίπτωση μίας Διζωνικής Άμυνας, με βέλτιστη Κατανομή "ατάκτων" (: σχεδιασμένων στην τύχη) αμυντικών Αναχαιτίσεων N_1 στην πρώτη Ζώνη και βέλτιστη Κατανομή "ατάκτων" (: σχεδιασμένων στην τύχη) αμυντικών Αναχαιτίσεων N_2 στην δεύτερη Ζώνη.

Τότε, σύμφωνα με τους *Τύπους* (2) της σελίδας 159, $(3)-(4)$ της σελίδας 163, και (1) της σελίδας 157 του 1ου Βιβλίου του 2ου Τόμου, έπεται ότι ο αναμενόμενος αριθμός M_1 των Επιτιθεμένων Εισβολέων που θα διαπεράσουν την πρώτη Ζώνη Άμυνας δίνεται από τον *Τύπο*:

$$M_1 = M \exp\left(-\frac{p_1 N_1}{M}\right), \qquad (6)$$

ενώ ο αναμενόμενος αριθμός M_2 των Επιτιθεμένων Εισβολέων που θα διαπεράσουν και την δεύτερη Ζώνη Άμυνας δίνεται από τον *Τύπο*:

$$M_2 = M_1 \exp\left(-\frac{p_2 N_2}{M_1}\right). \qquad (7)$$

Στους δύο αυτούς *Τύπους*, χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός p_j για την αναπαράσταση της πιθανότητας μία μεμονωμένη Αναχαίτιση να καταστρέψει έναν Επιτιθέμενο Πύραυλο (ή Κεφαλή) μέσα στην $j-$οστή Ζώνη Άμυνας $(j=1,2)$. Είναι σαφές ότι ισχύουν και οι εξής παρακάτω δύο *Σχέσεις*:

$$p_2 N_2 = M - M_1 \qquad (8)$$

$$D_0 = p_1 N_1 + p_2 N_2 \text{ (: το } \textit{Ολικό Αμυντικό Δυναμικό}\text{)}^{(1)} \qquad (9)$$

Ιδιαιτέρως, εάν η πιθανότητα καταστροφής ενός Επιτιθέμενου Πυραύλου (ή Κεφαλής) είναι η ίδια σε αμφότερες τις Αμυντικές Ζώνες , εάν, δηλαδή, $p_1 = p_2 = p$,τότε οδηγούμαστε στο ακόλουθο Σύστημα Εξισώσεων:

$$M_1 = M \exp\left(-\frac{pN_1}{M}\right), \qquad (10)$$

$$M_2 = M_1 \exp\left(-\frac{pN_2}{M_1}\right), \qquad (11)$$

$$pN_2 = M - M_1, \qquad (12)$$

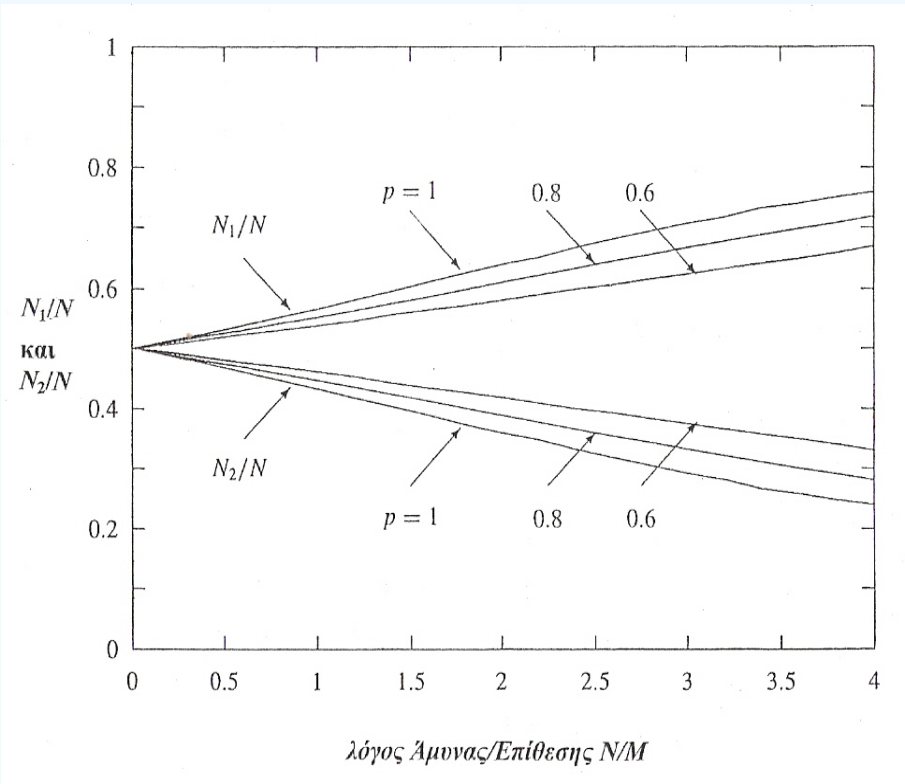
$$D_0 = pN_1 + pN_2 = pN \qquad (13)$$

Οι πρώτες τρεις Μη Γραμμικές Εξισώσεις ως προς τις τρεις μεταβλητές M_1, M_2 και N_1 (ή N_2) μπορούν να επιλυθούν με την βοήθεια μίας Επαναληπτικής Μεθόδου της Αριθμητικής Ανάλυσης.

---

(1)Για τον Ορισμό της Έννοιας του Ολικού Αμυντικού Δυναμικού, βλέπε στο 1ο Βιβλίο του 2ου Τόμου.

Στο επόμενο *Σχήμα 1*, δίνονται οι βέλτιστες τιμές των πηλίκων (N_1/N) και (N_2/N) (όπου $N := N_1 + N_2$) για τις οποίες ο αναμενόμενος αριθμός M_2 των Επιτιθεμένων Εισβολέων που θα διαπεράσουν και την δεύτερη Ζώνη Άμυνας καθίσταται ελάχιστος, για διάφορες τιμές της πιθανότητας p.



Σχήμα 1. *Διακύμανση των βέλτιστων τιμών των πηλίκων* (N_1/N) *και* (N_2/N) *αναλόγως των τιμών που λαμβάνει ο λόγος* (N/M) *και η πιθανότητα* p

VII.6. Παρατήρηση. Στις περιπτώσεις που, για κάποιους λόγους, μία από τις δύο Αμυντικές Ζώνες είναι ανενεργή, οι *Σχέσεις* (10), (11), (12) και (13) εκφυλλίζονται τετριμμένα ως εξής:

- $$M_1 = M,\ M_2 = M\exp\left(-\frac{pN}{M}\right),\ N_1 = 0,\ N_2 = N \qquad (14)$$

  σε περίπτωση που η 1η Αμυντική Ζώνη εμφανισθεί ως ανενεργή

και

- $$M_1 = M\exp\left(-\frac{pN}{M}\right),\ M_2 = M_1,\ N_1 = N,\ N_2 = 0 \qquad (15)$$

  σε περίπτωση που η 2η Αμυντική Ζώνη εμφανισθεί ως ανενεργή. ■

VII.7. Παρατήρηση. Αν και, θεωρητικά, για την επίτευξη μίας βέλτιστης Αμυντικής λειτουργίας, θα πρέπει ο λόγος (N_1/N) να διαμορφώνεται καταλλήλως αναλόγως προς την εκάστοτε (δεδομένη) τιμή του πηλίκου (N/M), ***στην πράξη κανείς μπορεί να θεωρεί ότι η τιμή του λόγου*** (N_1/N) ***είναι σταθερή τιμή για ένα ευρύ φάσμα τιμών του πηλίκου*** (N/M) ***που κυμαίνεται από*** 0 ***έως*** 3.

Για παράδειγμα, τα αποτελέσματα

$$(N_1/N) = (1/2) \text{ και } (N_1/N) = (2/3)$$

είναι πρακτικά ταυτόσημα ως προς την διαδικασία επίτευξης μίας βέλτιστης Αμυντικής λειτουργίας. Αυτό σημαίνει ότι οι Αμυντικές Τακτικές μπορούν να απλοποιηθούν γιατί η τιμή του λόγου (N_1/N) δεν χρειάζεται να διαμορφωθεί καταλλήλως για κάθε ξεχωριστή Επίθεση.■

VII.8. Παρατήρηση. Στην γενικότερη περίπτωση κατά την οποία οι κατανομές N_1 και N_2 των κατανομών των Αναχαιτίσεων ***δεν είναι βέλτιστες***, οι Εξισώσεις (10) και (11) του Συστήματος της σελίδας 230 μπορούν να μεταβληθούν όπως ακολούθως:

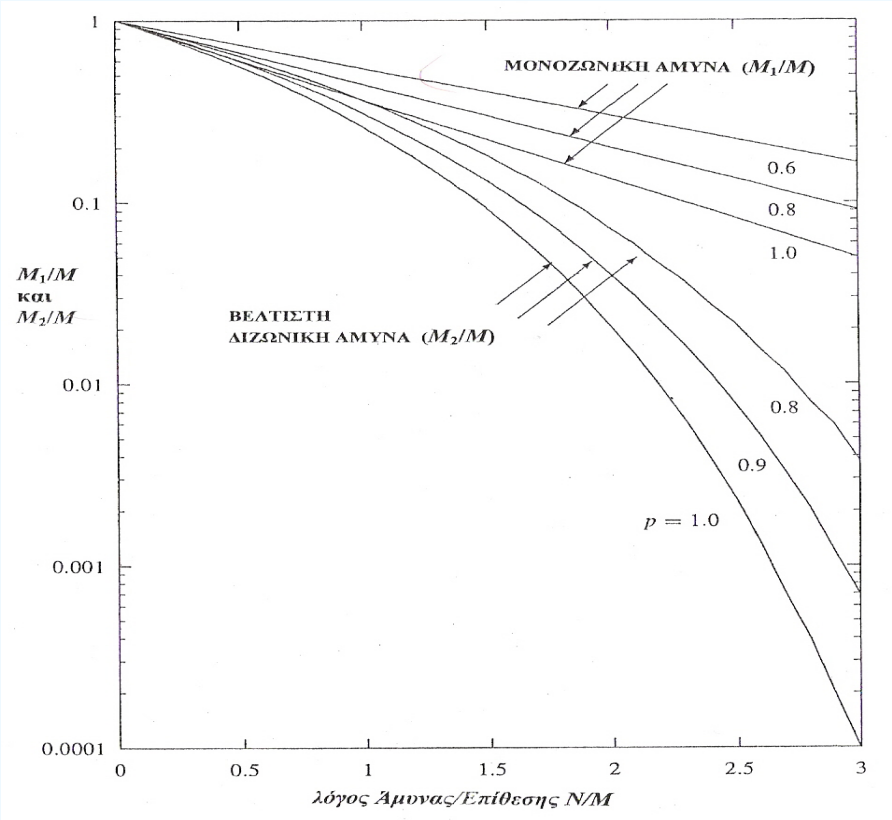
$$M_1 = M \exp\left(-\frac{p_1 N_1}{N}\frac{N}{M}\right) \qquad (16)$$

και

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 \exp\left(-\frac{p_2 N_2}{M_1}\right) = M \exp\left(-\frac{p_1 N_1}{N}\frac{N}{M}\right)\exp\left(-\frac{p_2 N_2}{N}\frac{N}{M_1}\right) \\ &= M \exp\left(-\frac{p_1 N_1}{N}\frac{N}{M}\right)\exp\left[-p_2\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N}{M}\exp\left(\frac{p_1 N_1}{N}\frac{N}{M}\right)\right], \end{aligned} \qquad (17)$$

όπου $N = N_1 + N_2$. ■

Στο επόμενο *Σχήμα 2*, δίνονται οι, βάσει των *Σχέσεων* $(5b)$ και (11), γραφικές παραστάσεις των τιμών των λόγων (M_1/M) και (M_2/M) συναρτήσει των τιμών του πηλίκου (N/M). Όπως καθίσταται εμφανές, η ανωτερότητα μίας Διζωνικής Άμυνας έναντι μίας Μονοζωνικής Άμυνας είναι σαφής. Έτσι, όταν, για παράδειγμα, $(N/M) = 3$, το συγκριτικό πλεονέκτημα της Διζωνικής Άμυνας μεταφράζεται σε περίπου τρεις τάξεις μεγέθους. Η υπεροχή αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι μία Διζωνική Άμυνα μπορεί να θεωρείται ότι αναπαριστά μία συναθροιζόμενη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" στην οποία οι Αναχαιτίσεις της δεύτερης Ζώνης έχουν προορισμό τους Εισβολείς που θα διαφύγουν τις Αναχαιτίσεις της πρώτης Ζώνης.



Σχήμα 2. *Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσματικοτήτων μίας Μονοζωνικής και μίας Διζωνικής Άμυνας σύμφωνα με την Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης*

7.2.Γ. Η Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης

7.2.Γ.i. Η Πιθανότητα Εξουδετέρωσης των Στόχων με την Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης

Για την απλούστερη των περιπτώσεων κατά την οποία όλα τα χρησιμοποιούμενα Όπλα της Αμυνόμενης Πλευράς είναι ίδια, ένας από τους αποτελεσματικότερους τρόπους Άμυνας η Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής των Πυρών.

Σύμφωνα με την Τακτική αυτή, εάν ο αριθμός N των δυνατών Αναχαιτίσεων της Αμυνόμενης Πλευράς ***είναι*** ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού M των Εισβολέων της Επιτιθέμενης Πλευράς, τότε κάθε Στόχος πρέπει να σφραγισθεί ακριβώς

$$L = \frac{N}{M} \qquad (18)$$

φορές. Αυτό σημαίνει ότι θα δεσμευθούν κατά εκάστου Στόχου ακριβώς L Πυρά της Αμυνομένης και, ως εκ τούτου, ***η πιθανότητα*** $p_{\mu\kappa}^{(o)}$ ***κάθε Στόχου να διαφύγει την καταστροφή από την εναντίον του ρίψη και των*** L ***Πυρών ισούται με***

$$p_{\mu\kappa}^{(o)} = p_{\mu\kappa}^{(o)}(L) = (1-p)^{L} = (1-p)^{N/M} \qquad (19)$$

(Ο δείκτης $\mu\kappa$ δηλώνει την Μη Καταστροφή του Στόχου, ενώ ο δείκτης (o) τον χαρακτήρα της Ομοιόμορφης Κατανομής των Πυρών. Όπως συνήθως, το σύμβολο p αποδίδει την πιθανότητα καταστροφής του εν λόγω Στόχου από μία Αναχαίτιση που θα επιχειρηθεί εναντίον του.)

Εξ άλλου, σύμφωνα με την Τακτική της Ομοιόμορφης Κατανομής των Πυρών, εάν ο αριθμός N των δυνατών Αναχαιτίσεων της Αμυνόμενης Πλευράς ***δεν είναι*** ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού M των Εισβολέων της Επιτιθέμενης Πλευράς, τότε ο λόγος $L = N/M$ γράφεται υπό την μορφή:

$$L = I + F\,,$$

όπου το σύμβολο I αναπαριστά το ακέραιο μέρος $\text{int}[L]$ του αριθμού L (δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που είναι μικρότερος του L) και το σύμβολο F το υπόλοιπο κλασματικό μέρος του αριθμού L. Η γραφή αυτή του αριθμού L συνεπάγεται ότι ο βέλτιστος τρόπος Σκόπευσης είναι ο ακόλουθος:

- $(I+1)$ Αναχαιτίσεις της Αμυνόμενης σφραγίζονται κατά FM Εισερχομένων Στόχων,

και

- I Αναχαιτίσεις της Αμυνόμενης σφραγίζονται κατά $(1-F)M$ Εισερχομένων Στόχων.

Έπεται ότι ***η (μέση) πιθανότητα*** $\overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)}$ ***κάθε Στόχου να διαφύγει την καταστροφή από την εναντίον του ρίψη όλων των Πυρών που θα σφραγισθούν και θα ριφθούν εναντίον του ισούται με***

$$\overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)} = \overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)}(L) = F\, p_{\mu\kappa}^{(o)}(I+1) + (1-F)\, p_{\mu\kappa}^{(o)}(I). \qquad (20)$$

(Παρατηρήστε πως ο *Τύπος* (20) περιέχει ως ειδική περίπτωση τον *Τύπο* (19), καθόσον όταν ο αριθμός L είναι ακέραιος τότε $I = L$, $F = 0$ και επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση, $\overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)} = p_{\mu\kappa}^{(o)}(L)$.)

Αντικαθιστώντας τώρα την έκφραση του *Τύπου* (19) για την πιθανότητα $p_{\mu\kappa}^{(o)}$ μέσα στον *Τύπο* (20), μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη *Πρόταση*:

VII.9.Πρόταση. ***Έστω*** N ***είναι ο αριθμός όλων των δυνατών Αναχαιτίσεων της Αμυνόμενης Πλευράς και*** M ***ο αριθμός όλων των Εισβολέων της Επιτιθέμενης Πλευράς. Εάν***

$$\frac{N}{M} = I + F$$

όπου I είναι το ακέραιο μέρος $\text{int}[N/M]$ του αριθμού N/M και F το υπόλοιπο κλασματικό μέρος, ***τότε η (μέση) πιθανότητα*** $\overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)}$ ***κατά την οποία ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει την καταστροφή από την "ομοιόμορφη" ρίψη των Πυρών που θα δεσμευθούν***

και θα ριφθούν εναντίον του ισούται με

$$\overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)} = \overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)}(N/M) = (1-p)^{I}\,(1-p\,F) \qquad (21)$$

Επί πλέον, ***ο αναμενόμενος αριθμός των εισερχομένων Στόχων που θα διαφύγουν την καταστροφή από την εναντίον του "ομοιόμορφη" ρίψη των Πυρών δίνεται από τον Τύπο:***

$$E_{\mu\kappa}^{(o)} = \overline{p}_{\mu\kappa}^{(o)}\,M = M\,(1-p)^{I}\,(1-pF). \qquad (22)$$

VII.10. Παρατήρηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι *Τύποι* (21) και (22) εξακολουθούν να ισχύουν ακόμα και στην περίπτωση που $I=0$. Πράγματι, τότε $F=(N/M)$ και επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση, έχουμε:

$$p_{\mu\kappa}^{(o)} = p_{\mu\kappa}^{(o)}(N/M) = \left(1-p\frac{N}{M}\right)$$

και

$$E_{\mu\kappa}^{(o)} = p_{\mu\kappa}^{(o)}\,M = M\left(1-p\frac{N}{M}\right). \blacksquare$$

VII.11. Παρατήρηση. Όπως επισημάνθηκε παραπάνω, εάν το πηλίκον N/M είναι ακέραιος αριθμός, τότε κάθε εισερχόμενος Στόχος δέχεται την Επίθεση από τον ίδιο αριθμό Πυρών (ήτοι, (N/M) Πυρά) και έχει ακριβώς την ίδια πιθανότητα $(1-p)$ να διαφύγει την καταστροφή από την "ομοιόμορφη" ρίψη όλων των Πυρών (ήτοι, (N/M) Πυρών) που θα ριφθούν εναντίον του. Σε μία τέτοια περίπτωση, η πιθανότητα $p_{\mu\kappa\,m\,\alpha\pi o\,M}^{(o)}$, κατά την οποία ακριβώς m από τους M συνολικά εισερχόμενους Στόχους θα καταφέρουν να διαφύγουν την καταστροφή από την "ομοιόμορφη" ρίψη όλων των Πυρών που θα ριφθούν εναντίον τους, θα δίνεται από τον *Τύπο*:

$$p_{\mu\kappa\,m\,\alpha\pi o\,M}^{(o)} = \binom{M}{m}\left[(1-p)^{N/M}\right]^{m}\left[1-(1-p)^{N/M}\right]^{M-m}.$$

7.2.Γ.ii.Εφαρμογή της Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης εντός Άμυνας σε Βάθος

Θα μελετήσουμε, κατ' αρχάς, την περίπτωση μίας Μονοζωνικής Άμυνας δηλαδή την περίπτωση κατά την οποία ***η Άμυνα αποτελείται από μία μόνον Ζώνη η οποία συνίσταται στην εκδήλωση*** N ***"ομοιομόρφων"*** (: σχεδιασμένων κατά την έννοια της προηγούμενης *Υποπαραγράφου 7.2.Γ.i*) ***Αναχαιτίσεων εναντίον*** M ***Επιτιθεμένων Πυραύλων (ή Κεφαλών)***.

Σύμφωνα με τον *Τύπο* (22) της παραπάνω *Πρότασης VII.9, ο αναμενόμενος αριθμός Επιτιθεμένων Εισβολέων που θα διαπεράσουν από την μοναδική Ζώνη Άμυνας δίνεται από την Σχέση*:

$$M_1 = M(1-p)^I(1-pF),$$

όπου

$I := \text{int}[N/M] =$ το ακέραιο μέρος του αριθμού N/M,

και

$F := (N/M) - \text{int}[N/M]$.

Έπεται ότι

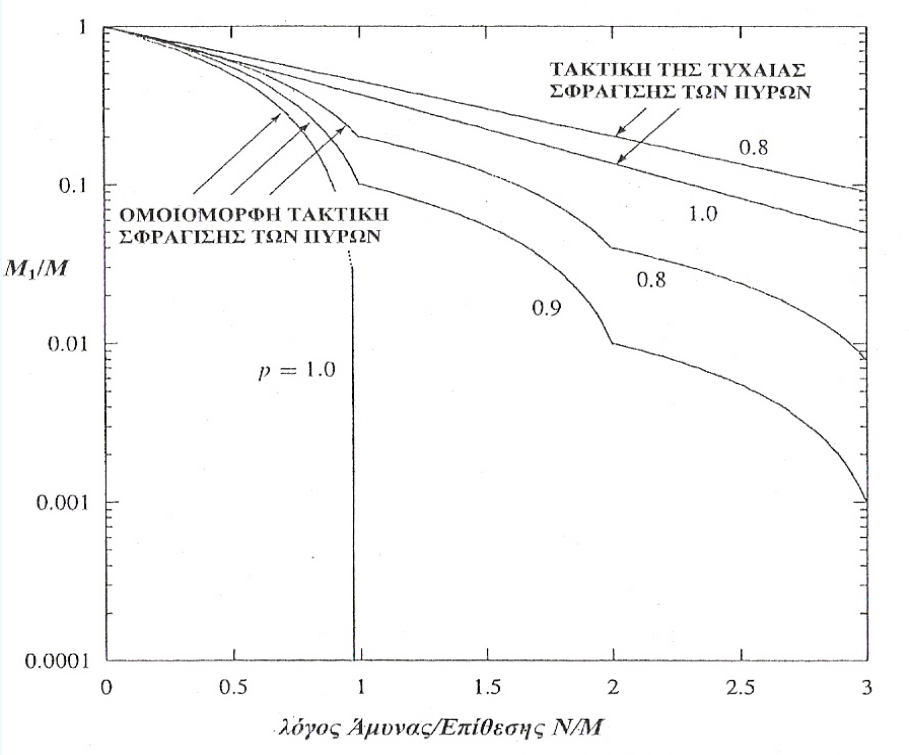
$$\frac{M_1}{M} = (1-p)^{\text{int}(N/M)}\left[1 - p\frac{N}{M} + p\,\text{int}\left(\frac{N}{M}\right)\right]. \qquad (23)$$

Προφανώς, όταν $(N/M) < 1$, τότε $\text{int}[N/M] = 0$ και κατ' ακολουθία, σ' αυτήν την περίπτωση, ο *Τύπος* (23) γίνεται:

$$\frac{M_1}{M} = 1 - p\frac{N}{M}. \qquad (24)$$

Στο επόμενο *Σχήμα 3* πραγματοποιείται μία σύγκριση της αμυντικής αποτελεσματικότητας της Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης με την αμυντική αποτελεσματικότητα της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης στην

περίπτωση μίας Μονοζωνικής Αμυντικής Ζώνης. Στο *Σχήμα* αυτό καταδεικνύεται σαφώς η υπεροχή της Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης έναντι της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης.



Σχήμα 3. *Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσματικοτήτων μίας Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής Πυρών Σκόπευσης με την αμυντική αποτελεσματικότητα μίας Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης στην περίπτωση μίας Μονοζωνικής Αμυντικής Ζώνης.*

Θα περάσουμε τώρα στην περίπτωση μίας Διζωνικής Άμυνας, με βέλτιστη Κατανομή "ομοιομόρφων" αμυντικών Αναχαιτίσεων N_1 στην πρώτη Ζώνη και βέλτιστη Κατανομή "ομοιομόρφων" αμυντικών Αναχαιτίσεων N_2 στην δεύτερη Ζώνη.

Στην περίπτωση αυτή, οι *Εξισώσεις* που διέπουν τα αμυντικά αποτελέσματα προκύπτουν αναλόγως προς την *Εξίσωση* (23) προσαρμοσμένα στην εκάστοτε Αμυντική Ζώνη.

Έτσι, έχουμε αμέσως:

$$\frac{M_1}{M} = (1-p_1)^{\mathrm{int}(N_1/M)}\left[1 - p_1\frac{N_1}{M} + p_1\,\mathrm{int}\left(\frac{N_1}{M}\right)\right] \qquad (25)$$

και

$$\frac{M_2}{M} = (1-p_2)^{\mathrm{int}(N_2/M)}\left[1 - p_2\frac{N_2}{M} + p_2\,\mathrm{int}\left(\frac{N_2}{M}\right)\right] \qquad (26)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός p_j για την αναπαράσταση της πιθανότητας μία μεμονωμένη Αναχαίτιση να καταστρέψει έναν Επιτιθέμενο Πύραυλο (ή Κεφαλή) μέσα στην $j-$οστή Ζώνη Άμυνας $(j=1,2)$.Εισάγοντας μάλιστα τις εξής δύο νέες εκφράσεις:

$$\frac{N_1}{M} = \frac{N_1}{N}\frac{N}{M} \text{ και } \frac{N_2}{M_1} = \frac{(N-N_1)}{N}\frac{N}{M_1} = \left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N}{M}\frac{M}{M_1},$$

οι *Εξισώσεις* (25) και (26) μπορούν να επαναδιατυπωθούν και υπό την ακόλουθη μορφή:

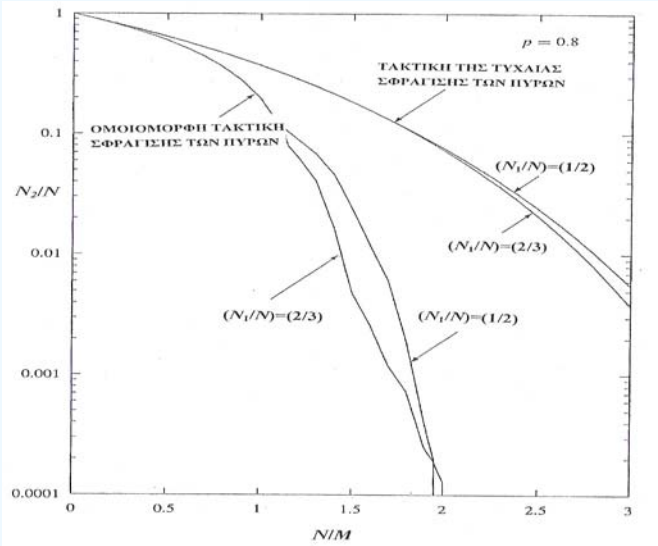
$$\frac{M_1}{M} = (1-p_1)^{\mathrm{int}\left(\frac{N_1}{N}\frac{N}{M}\right)}\left[1 - p_1\frac{N_1}{N}\frac{N}{M} + p_1\,\mathrm{int}\left(\frac{N_1}{N}\frac{N}{M}\right)\right] \qquad (27)$$

και

$$\frac{M_2}{M} = \frac{M_1}{M}(1-p_2)^{\mathrm{int}\left(\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N}{M}\frac{M}{M_1}\right)} \times\left[1 - p_2\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N}{M}\frac{M}{M_1} + p_2\,\mathrm{int}\left(\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N}{M}\frac{M}{M_1}\right)\right], \qquad (28)$$

αντιστοίχως.

Στο επόμενο *Σχήμα 4* πραγματοποιείται μία σύγκριση της αμυντικής αποτελεσματικότητας της Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης με την αμυντική αποτελεσματικότητα της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης στην περίπτωση μίας Διζωνικής Άμυνας. Όπως συνέβη και στην περίπτωση της Μονοζωνικής Άμυνας, έτσι και στο *Σχήμα* αυτό καταδεικνύεται σαφώς η υπεροχή της Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης έναντι της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης ως προς την μείωση του αριθμού των Εισβολέων που θα κατορθώσουν να διαπεράσουν και τις δύο Ζώνες Άμυνας. Για παράδειγμα, όταν $(N/M)=3$, η εφαρμογή της Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης δείχνει ότι το ποσοστό της διαπεραστικότητας (M_1/M) των Εισβολέων από την πρώτη Αμυντική Ζώνη μειώνεται κατά ένα υποπολλαπλάσιο του 10 (περίπου από 0.1 έως 0.001) σε σύγκριση προς την Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης.



Σχήμα 4. *Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσματικοτήτων μίας Ομοιόμορφης Τακτικής Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης με την αμυντική αποτελεσματικότητα μίας Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης στην περίπτωση μίας Διζωνικής Αμυντικής Ζώνης.*

VII.12. Παρατήρηση. Όταν $(N/M)<1$, οι *Εξισώσεις* (27) και (28) της σελίδας 26 μπορούν να απλοποιηθούν αρκετά, και να γραφούν υπό την μορφή:

$$\frac{M_1}{M}=1-p_1\frac{N_1}{N}\frac{N}{M} \qquad (29)$$

και

$$\frac{M_2}{M}=1-p_1\frac{N_1}{N}\frac{N}{M}-p_2\left(1-\frac{N_1}{N}\right)\frac{N}{M}, \qquad (30)$$

αντιστοίχως. Στην ειδικότερη μάλιστα περίπτωση κατά την οποία $p_1=p_2=p$, οι τελευταίες *Εξισώσεις* απλοποιούνται ακόμα περισσότερο γραφόμενες υπό την μορφή:

$$\frac{M_1}{M}=1-p\frac{N_1}{N}\frac{N}{M} \qquad (31)$$

και

$$\frac{M_2}{M}=1-p\frac{N}{M} \qquad (32)$$

αντιστοίχως. ■

7.2.Δ. Η Τακτική Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"

7.2.Δ.i. Η Πιθανότητα Εξουδετέρωσης των Στόχων με την Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"

Η Αμυντική Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" βασίζεται στην αξίωση ότι τα Κέντρα Ελέγχου και Διαταγών της Διαχείρισης της Μάχης έχουν την δυνατότητα αφενός της άμεσης πληροφόρησης

ως προς τις συνέπειες μίας Αναχαίτισης ή ενός Κτυπήματος (κυρίως ως προς το εάν ο Στόχος διέφυγε ή κτυπήθηκε), και αφετέρου της άμεσης Δέσμευσης των επόμενων διαδοχικών Αναχαιτίσεων ή Κτυπημάτων εναντίον των εισελθόντων Στόχων που διέφυγαν την καταστροφή.

Ομοίως προς τις προηγούμενες δύο περιπτώσεις Αμυντικών Τακτικών, θα υποθέτουμε και πάλι ότι υπάρχουν M το πλήθος εισερχόμενοι Στόχοι και ότι για την αντιμετώπισή τους μπορούν

- να επιχειρηθούν N το πλήθος Αναχαιτίσεις εκάστη από τις οποίες με πιθανότητα επιτυχίας ίση με p

ή ακόμα

- να επιχειρηθούν N το πλήθος Κτυπήματα με πιθανότητα επιτυχίας εκάστου εξ αυτών ίση με p, κατά τέτοιον τρόπο όμως που κάθε ένα από τα Κτυπήματα αυτά να μπορεί να κατανέμεται κατά αυθαίρετο τρόπο εναντίον των εισερχόμενων Στόχων.

Όπως είναι γνωστό από την <<ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟΧΟΥ>>, η πιθανότητα P_λ να καταστραφούν λ ακριβώς Στόχοι επί του συνόλου των N Αναχαιτίσεων ή Κτυπημάτων που θα επιχειρηθούν ισούται με:

$$P_\lambda = \binom{N}{\lambda} p^\lambda (1-p)^{N-\lambda}, \quad (N \geq M). \tag{33}$$

Επομένως, ο αναμενόμενος αριθμός εισερχόμενων Στόχων που θα καταστραφούν προσδιορίζεται από τον *Τύπο*:

$$E\left(M_\kappa^{(SLS)}\right) = \sum_{\lambda=0}^{M} \lambda P_\lambda + \sum_{\lambda=M+1}^{N} M P_\lambda \tag{34}$$

(Ο δείκτης κ δηλώνει την Καταστροφή του Στόχου, ενώ ο δείκτης (SLS) τον χαρακτήρα της Αμυντικής Τακτικής της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος".) Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι, για $\lambda \leq M$, αναμένεται να καταστραφούν λ εισερχόμενοι Στόχοι, ενώ, για $\lambda > M$, αναμένεται ότι θα καταστραφούν ακριβώς M εισερχόμενοι Στόχοι. Έτσι, έχουμε την παρακάτω *Πρόταση*:

VII.13.Πρόταση. ***Ο αναμενόμενος αριθμός των εισερχομένων Στόχων που θα διαφύγουν την καταστροφή από την εναντίον του ρίψη των Πυρών με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" δίνεται από τον Τύπο:***

$$E_{\mu\kappa}^{(SLS)} = M - E\left(M_{\kappa}^{(SLS)}\right) = M\, p_{\mu\kappa}^{(SLS)} \ , \qquad (35)$$

όπου $p_{\mu\kappa}^{(SLS)}$ ***είναι η πιθανότητα, κατά την οποία ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει την καταστροφή από την ρίψη των Πυρών Σκόπευσης που θα σφραγισθούν και θα ριφθούν εναντίον του με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος".*** (Εδώ, ο δείκτης $\mu\kappa$ δηλώνει την Μη Καταστροφή του Στόχου, ενώ ο δείκτης (SLS) τον χαρακτήρα της Αμυντικής Τακτικής της Κατανομής Δεσμεύσεων των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος".)

Η πιθανότητα $p_{\mu\kappa}^{(SLS)}$ ***ισούται με***

$$p_{\mu\kappa}^{(SLS)} = \frac{M - E\left(M_{\kappa}^{(SLS)}\right)}{M} = 1 - \sum_{\lambda=0}^{M} \frac{\lambda}{M} P_{\lambda} - \sum_{\lambda=M+1}^{N} P_{\lambda} \ . \qquad (36)$$

VII.14. Παρατήρηση. Επισημαίνοντας ότι

$$1 = \sum_{\lambda=0}^{N} P_{\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{M} P_{\lambda} + \sum_{\lambda=M+1}^{N} P_{\lambda} \ ,$$

η παρουσίαση της *Εξίσωσης* (36) στην παραπάνω *Πρόταση* μπορεί να απλουστευθεί και να δώσει:

$$p_{\mu\kappa}^{(SLS)} = \begin{cases} \sum_{\lambda=0}^{M} \left(1 - \frac{\lambda}{M}\right) P_{\lambda}, \quad \gamma\iota\alpha\ N \geq M & (37) \\ \left(1 - \frac{p\,N}{M}\right), \quad \gamma\iota\alpha\ N < M. & (38) \end{cases}$$

■

Για λόγους πληρότητας του Κειμένου, στους παρακάτω δύο *Πίνακες 2* και *3*, έχουμε συγκεντρώσει, για $p = 0.5$ και $p = 0.8$ αντιστοίχως, τις τιμές των πιθανοτήτων κατά τις οποίες ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει την καταστροφή από τα Πυρά Σκόπευσης που θα σφραγισθούν και θα ριφθούν εναντίον του

1) με την Τακτική της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης,
2) με την Ομοιόμορφη Τακτική Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης,
3) με την Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος".

Όπως μπορεί να καταστεί εύκολα σαφές, η Τακτική της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" υπερτερεί έναντι των άλλων δύο Τακτικών. Αξίζει, ωστόσο να σημειωθεί ότι στην περίπτωση κατά την οποία $M = 1$ (δηλαδή στην περίπτωση που ο Εισβολέας είναι ένας και μόνον Στόχος), οι τρεις Τακτικές ταυτίζονται και οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

	Τακτικές Δέσμευσης Πυρών	*M*=1	*M*=2	*M*=3	*M*=4	*M*=5
N=1	**1)**Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.5000	0.7500	0.8333	0.8750	0.9000
	2)Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.5000	0.7500	0.8333	0.8750	0.9000
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.5000	0.7500	0.8333	0.8750	0.9000
N=2	**1)**Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.2500	0.5625	0.6944	0.7656	0.8100
	2)Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.2500	0.5000	0.6667	0.7500	0.8000
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.2500	0.5000	0.6667	0.7500	0.8000

	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.1250	0.4219	0.5787	0.6699	0.7290
N=3	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.1250	0.3750	0.5000	06250	0.7000
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.1250	0.3125	0.5000	0.6250	0.7000
	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0625	0.3164	0.4823	0.5862	0.6561
N=4	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0625	0.2500	0.4167	0.5000	0.6000
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.0625	0.1875	0.3542	0.5000	0.6000
	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0313	0.2373	0.4019	0.5129	0.5905
N=5	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0313	0.1875	0.3333	0.4375	0.5000
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.0313	0.1094	0.2396	0.3828	0.5000

ΠΙΝΑΚΑΣ 2. Τιμές των πιθανοτήτων κατά τις οποίες ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει της καταστροφής από τα Πυρά Σκόπευσης που θα σφραγισθούν και θα ριφθούν εναντίον του: *η περίπτωση* $p = 0.5$

	Τακτικές Δέσμευσης Πυρών	*M*=1	*M*=2	*M*=3	*M*=4	*M*=5
	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.2000	0.6000	0.7333	0.8000	0.8400
N=1	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.2000	0.6000	0.7333	0.8000	0.8400
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.2000	0.6000	0.7333	0.8000	0.8400
	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0400	0.3600	0.5378	0.6400	0.7056
N=2	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0400	0.2000	0.4667	0.6000	0.6800
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.0400	0.2000	0.4667	0.6000	0.6800
	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0080	0.2160	0.3944	0.5120	0.5927
N=3	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0080	0.1200	0.2000	04000	0.5200
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.0080	0.0560	0.2000	0.4000	0.5200
	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0016	0.1296	0.2892	0.4096	0.4979
N=4	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0016	0.0400	0.1467	0.2000	0.3600
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.0016	0.0144	0.0699	0.2000	0.3600

	1)Τυχαία Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0003	0.0778	0.2121	0.3277	0.4182
N=5	**2)**Ομοιόμορφη Δέσμευση των Πυρών Σκόπευσης	0.0003	0.0240	00933.	0.1600	0.2000
	3)Δέσμευση των Πυρών σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος"	0.0003	0.0035	0.0217	0.0819	0.2000

ΠΙΝΑΚΑΣ 3. Τιμές των πιθανοτήτων κατά τις οποίες ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει της καταστροφής από τα Πυρά Σκόπευσης που θα σφραγισθούν και θα ριφθούν εναντίον του : *η περίπτωση* $p = 0.8$

7.2.Δ.ii. Εφαρμογή της Τακτικής της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" εντός Άμυνας σε Βάθος

Θα μελετήσουμε μόνον την περίπτωση μίας Μονοζωνικής Άμυνας δηλαδή την περίπτωση κατά την οποία ***η Άμυνα αποτελείται από μία μόνον Ζώνη η οποία συνίσταται στην εκδήλωση*** N ***Αναχαιτίσεων ή Κτυπημάτων*** (: σχεδιασμένων κατά την έννοια της προηγούμενης *Υποπαραγράφου 7.2.Δ.i*) ***εναντίον*** M ***Επιτιθεμένων Πυραύλων (ή Κεφαλών)***. Οι αντίστοιχες *Εξισώσεις* ***για την περίπτωση μίας Διζωνικής Άμυνας*** μπορούν να σχηματισθούν και να διατυπωθούν με τρόπο ανάλογο των τρόπων που χρησιμοποιήθηκαν στις προαναφερθείσες περιπτώσεις των Τακτικών της Τυχαίας, είτε της Ομοιόμορφης, Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης εντός Διζωνικής Άμυνας (βλ. *Υποπαραγράφοι 7.2.Β.ii* και *7.2.Γ.ii*).

Ο ενδεικνυόμενος άμεσος τρόπος υπολογισμού της πιθανότητας επιτυχούς διείσδυσης των επιτιθεμένων Πυραύλων (ή Κεφαλών) δια μέσου μίας Μονοζωνικής Άμυνας εντός της οποίας τα Πυρά Σκόπευσης σφραγίζονται σύμφωνα με την Μέθοδο "Κτυπήματος-

Παρατήρησης-Κτυπήματος" προκύπτει βάσει των *Τύπων* των *Εξισώσεων* (33), (37) και (38) της πρηγουμένης *Υποπαραγράφου 7.2.Δ.i*:

VII.15.Πρόταση. ***Η πιθανότητα $p_{\mu\kappa}^{(SLS)}$, κατά την οποία ένας μεμονωμένος εισερχόμενος Στόχος θα διαφύγει την καταστροφή από την ρίψη των Πυρών Σκόπευσης που θα σφραγισθούν και θα ριφθούν εναντίον του με την Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" ισούται με***

$$p_{\mu\kappa}^{(SLS)} = \begin{cases} \sum_{\lambda=0}^{M}\left(1-\frac{\lambda}{M}\right)P_{\lambda}, & \gamma\iota\alpha\ N \geq M \qquad (39) \\ \left(1-\frac{p\,N}{M}\right), & \gamma\iota\alpha\ N < M. \qquad (40) \end{cases}$$

όπου P_{λ} είναι η πιθανότητα να καταστραφούν λ ακριβώς Στόχοι επί του συνόλου των N Αναχαιτίσεων ή Κτυπημάτων που θα επιχειρηθούν:

$$P_{\lambda} = \binom{N}{\lambda} p^{\lambda}(1-p)^{N-\lambda}, \quad (N \geq M). \qquad (41)$$

VII.16. Παρατήρηση. Παρά τις δημιουργηθείσες θετικές εντυπώσεις, θα πρέπει να τονισθεί ιδιαιτέρως ότι ***βασική προϋπόθεση για την αποτελεσματική λειτουργία της Τακτικής της Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης σύμφωνα με τη Μέθοδο "Κτυπήματος-Παρατήρησης-Κτυπήματος" είναι η μέγιστη ταχύτητα των Αναχαιτιζόντων Πυραύλων να είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν των Εισερχομένων Πυραύλων***. ■

7.3. Η Πιθανότητα Πλήρους Αποτροπής της Εισόδου Επιτιθεμένων Εισβολέων (Εχθρικών Πυραύλων ή Κεφαλών ή Αρμάτων)

Σε ό,τι ακολουθήσει, ***θα συμβολίζουμε με***

$$Q$$

την πιθανότητα κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας (Εχθρικός Πύραυλος ή Κεφαλή ή Εχθρικό Άρμα) καταστρέφεται από την Αμυνόμενη Πλευρά. Για λόγους απλοποίησης των δυσκολιών, θα δεχόμαστε ότι ***η ανωτέρω πιθανότητα*** Q ***είναι ακριβώς η ίδια για κάθε έναν από όλους τους μεμονωμένους Επιτιθέμενους Εισβολείς***.

Έτσι, ***η πιθανότητα***

$$P$$

κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας θα διαφύγει την καταστροφή ισούται με

$$P = 1 - Q.$$

(Η πιθανότητα P δεν πρέπει να συγχέεται με την πιθανότητα p της καταστροφής ενός μεμονωμένου Επιτιθέμενου Εισβολέα *από μία Αναχαίτιση* που θα επιχειρηθεί εναντίον του.)

Σε περίπτωση που ο αριθμός των Επιτιθέμενων Εισβολέων είναι M, και (χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του προηγουμένου *Εδαφίου 7.2*) συμβολίσουμε με M_j τον αναμενόμενο αριθμό Επιτιθεμένων Εισβολέων που θα διαπεράσουν από τις πρώτες j Ζώνες Άμυνας, τότε έχουμε

$$P = \frac{M_1}{M}$$

για μία Μονοζωνική Άμυνα και

$$P = \frac{M_2}{M}$$

για μία Διζωνική Άμυνα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέτουμε ότι οι Επιτιθέμενοι Εισβολείς είναι Εχθρικοί Πύραυλοι. Οι Πύραυλοι αυτοί μπορεί να έχουν μόνον μία Κεφαλή (: Μοναδιαίοι Πύραυλοι (Unitary Missiles)) ή να έχουν πολλαπλές Κεφαλές. Στην δεύτερη αυτή περίπτωση, κάθε μία από τις επί μέρους Κεφαλές θεωρείται ως ένας ξεχωριστός Εχθρικός (Μοναδιαίος) Πύραυλος.

Κατόπιν των προαναφερθέντων, εφόσον το (κατ' αυτήν την έννοια) πλήθος των Επιτιθεμένων Εχθρικών Πυραύλων είναι ίσο με M , ***η πιθανότητα καταστροφής και των*** M ***Πυραύλων από την Αμυνόμενη Πλευρά δίνεται από τον Τύπο:***

$$P_M(0) = \underbrace{QQ\cdots Q}_{M\ \phi o\rho\varepsilon\varsigma} = Q^M . \qquad (42)$$

Από την άλλη, ***η πιθανότητα κατά την οποία ο πρώτος Πύραυλος θα καταφέρει να διαπεράσει όλη την Άμυνα, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα καταστραφούν, ισούται με***:

$$P\ \underbrace{Q\ Q\cdots Q}_{M-1\ \phi o\rho\varepsilon\varsigma} = PQ^{M-1}.$$

Ομοίως, ***η πιθανότητα κατά την οποία ο δεύτερος Πύραυλος θα καταφέρει να διαπεράσει όλη την Άμυνα, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα καταστραφούν, ισούται με:***

$$Q\ P\ \underbrace{Q\ Q\cdots Q}_{M-2\ \phi o\rho\varepsilon\varsigma} = PQ^{M-1}$$

κ. ο. κ. Τέλος, ***η πιθανότητα κατά την οποία ο τελευταίος (ο*** $M^{\text{οστός}}$ ***Πύραυλος θα καταφέρει να διαπεράσει όλη την Άμυνα, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα καταστραφούν, ισούται με***:

$$\underbrace{Q\ Q\cdots Q}_{M-1\ \phi o\rho\varepsilon\varsigma}\ P = PQ^{M-1}.$$

Ως εκ τούτου, από το *Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας*, ***η πιθανότητα, κατά την οποία ένας μόνον Πύραυλος θα καταφέρει να διαπεράσει όλη την Άμυνα, ενώ όλοι οι υπόλοιποι θα καταστραφούν, ισούται με:***

$$P_M(1) = M\,P\,Q^{M-1}. \qquad (43)$$

Γενικεύοντας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σκεπτικό (ότι δηλαδή "*ο συνολικός αριθμός* m *από τους* M *συνολικά εισερχόμενους Πυραύλους*" ταυτίζεται με "*τον συνολικό αριθμό των <<Συνδυαστικών Τρόπων>>*

$$\binom{M}{m} = \frac{M!}{m!\,(M-m)!}$$

κατά τους οποίους m *διαφορετικά <<Αντικείμενα>> μπορούν να καταχωρηθούν σε* M *διαφορετικά <<Κελιά>>*") και να αποδείξουμε ότι

VII.17.Πρόταση. ***Εάν***

$$Q$$

είναι η πιθανότητα κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας (Εχθρικός Πύραυλος ή Κεφαλή ή Εχθρικό Άρμα) θα καταστραφεί από την Αμυνόμενη Πλευρά και

$$P$$

η (συζυγής) πιθανότητα κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας θα διαφύγει την καταστροφή, τότε η πιθανότητα

$$P_M(m),$$

κατά την οποία m ***το πλήθος από τους*** M ***συνολικά εισερχόμενους Πυραύλους θα καταφέρουν να διαπεράσουν όλη την Άμυνα, ισούται με:***

$$P_M(m) = \binom{M}{m} P^m Q^{M-m} = \frac{M!}{m!\,(M-m)!}(1-Q)^m Q^{M-m}. \blacksquare \quad (44)$$

Κατ' ακολουθία, προκύπτει, αμέσως και εκ νέου, ο *Τύπος* (43):

VII.18.Πόρισμα.. .*Εάν*

$$Q$$

είναι η πιθανότητα κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας (Εχθρικός Πύραυλος ή Κεφαλή ή Εχθρικό Άρμα) θα καταστραφεί από την Αμυνόμενη Πλευρά και

$$P$$

η (συζυγής) πιθανότητα κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας θα διαφύγει την καταστροφή, τότε η πιθανότητα

$$P_M(0)$$

πλήρους αποτροπής της εισόδου των Επιτιθεμένων Εισβολέων (Εχθρικών Πυραύλων ή Κεφαλών ή Αρμάτων) (δηλαδή, η πιθανότητα καταστροφής και των M Επιτιθεμένων Εισβολέων από την Αμυνόμενη Πλευρά) ***δίνεται από τον Τύπο:***

$$P_M(0) = Q^M = (1-P)^M .. \blacksquare \qquad (45)$$

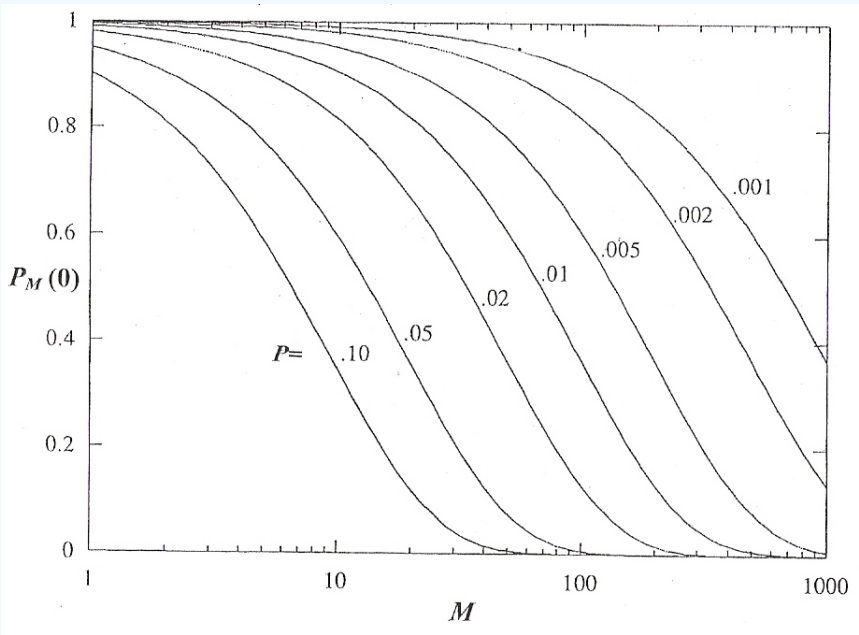
Πρέπει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα P, κατά την οποία ένας μεμονωμένος Επιτιθέμενος Εισβολέας θα διαφύγει την καταστροφή, είναι συνάρτηση τόσο της Τακτικής Δέσμευσης των Πυρών Σκόπευσης όσο και του λόγου (N/M).

Στο επόμενο *Σχήμα 5*, σχεδιάζεται το γράφημα της πιθανότητας $P_M(0)$ ως συνάρτηση του αριθμού M των Επιτιθεμένων Εισβολέων, για διάφορες τιμές της P. Παρατηρούμε ότι,

- για οιαδήποτε δοθείσα τιμή της P ,η πιθανότητα $P_M(0)$ της πλήρους αποτροπής της εισόδου των Επιτιθεμένων Εισβολέων φθίνει καθώς αυξάνεται ο αριθμός M των Επιτιθεμένων Εισβολέων,

και

- για οιαδήποτε δοθείσα τιμή του αριθμού M των Επιτιθεμένων Εισβολέων, η πιθανότητα $P_M(0)$ της πλήρους αποτροπής της εισόδου των Επιτιθεμένων Εισβολέων αυξάνει καθώς η τιμή της P μειώνεται.



Σχήμα 5. *Γραφική παράσταση της πιθανότητας πλήρους αποτροπής της εισόδου των Εισβολέων ως συνάρτηση του αριθμού M των Επιτιθεμένων Εισβολέων και της πιθανότητας P*

Τέλος, παρατηρούμε πως, σύμφωνα με τον *Τύπο* (45) του *Πορίσματος VII.18*, έχουμε την *Σχέση* $\ln(P_M(0)) = M\ln(1-P)$, από την οποία έπεται ότι:

$$M = \frac{\ln(P_M(0))}{\ln(1-P)}. \qquad (46)$$

Βάσει του Τύπου (46), επειδή η πιθανότητα P είναι συνάρτηση

- της Τακτικής Δέσμευσης των Πυρών Σκόπευσης

και

- του λόγου

$$(N/M),$$

έχουμε την δυνατότητα να προσδιορίσουμε (με την βοήθεια Μεθόδων της Αριθμητικής Ανάλυσης) μία *Σχέση* που υφίσταται μεταξύ των τιμών M και N, για οιαδήποτε δοθείσα τιμή της πιθανότητας

$$P_M(0)$$

πλήρους αποτροπής της εισόδου των Επιτιθεμένων Εισβολέων.

Στο επόμενο *Σχήμα 6*, αφού χρησιμοποιήθηκε μία Επαναληπτική Μέθοδος Αριθμητικής Επίλυσης της *Σχέσης* αυτής, δίνεται η γραφική παράσταση της τιμής N συναρτήσει της τιμής M, όταν

$$P_M(0) = 0.5,$$

για τις περιπτώσεις των Τακτικών

- της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης

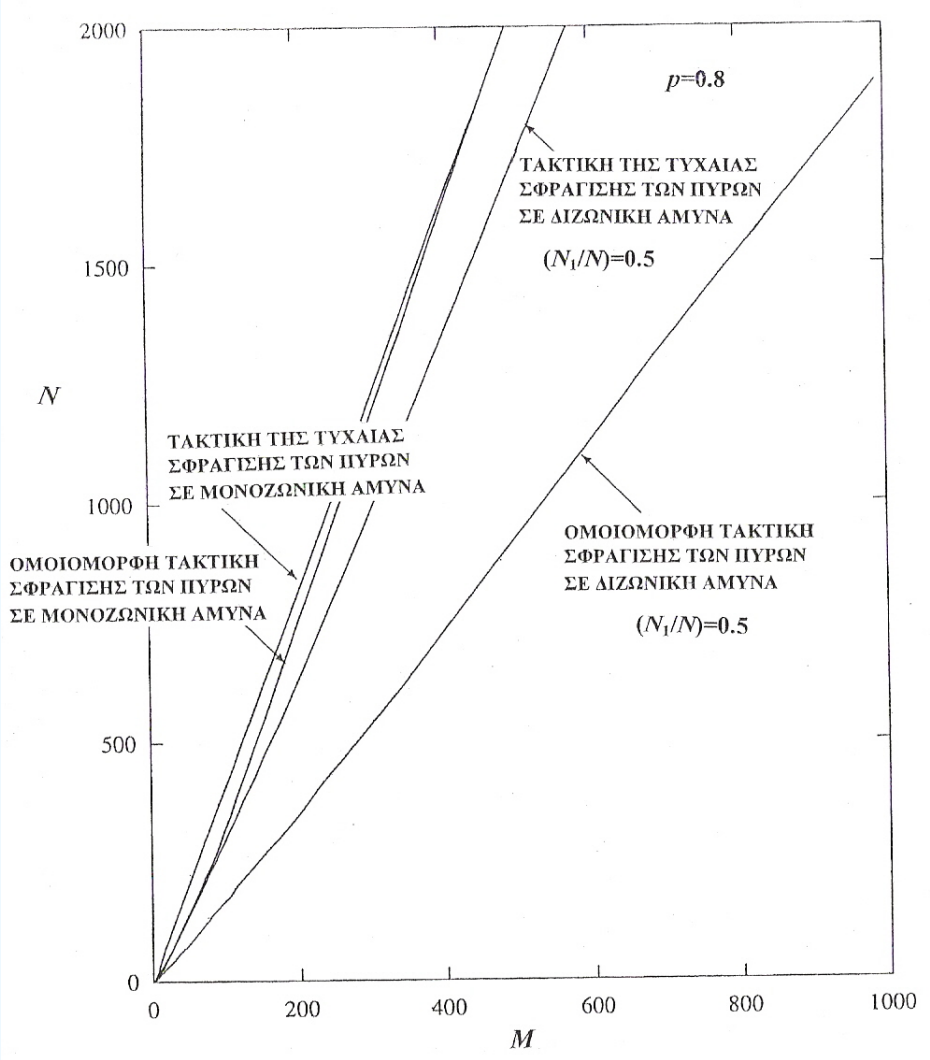
και

- της Ομοιόμορφης Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης

μέσα σε μία Μονοζωνική και μέσα σε μία Διζωνική Άμυνα.

Στο *Σχήμα* αυτό, φαίνονται για μία ακόμα φορά καθαρά τα πλεονεκτήματα της Ομοιόμορφης Τακτικής έναντι της Τακτικής της Τυχαίας Κατανομής των Πυρών Σκόπευσης.

Ακόμη, παρατηρήστε ότι, από το *Σχήμα*, προκύπτει για μία επί πλέον φορά, η υπεροχή της Διζωνικής έναντι της Μονοζωνικής Άμυνας.



Σχήμα 6.*Ο απαιτούμενος αριθμός Ν Αναχαιτίσεων προκειμένου, για ένα δοθέν αρχικό πλήθος Μ Επιτιθεμένων Εισβολέων και για διάφορα Αμυντικά Συστήματα, να εξασφαλισθεί πιθανότητα πλήρους αποτροπής της εισόδου των Επιτιθεμένων Εισβολέων ίση με* 50%

Βιβλιογραφία

[Δάρας, 2006] ΔΑΡΑΣ, Ν.Ιω.: "Εισαγωγή στις Στοχαστικές και Ανανεωτικές Θεωρίες Πολέμου ", *Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων*, *Βάρη*,2006, Τόμος 1ος Βιβλίο 1ο (σελ. 232) και Τόμος 1ος και Βιβλίο 2ο (σελ. 247)

[Finn Kent, 1985] FIND, M. V. and KENT, G. A.: "Simple Analytic Solutions to Complex Military Problems" *RAND Corp.*, *Santa Monica*, *CA*, *RAND Note N-2211-AF*, *August 1985*

[Mosher, 1997] MOSHER, D. :"The Grand Plan", *IEEE Spectrum*, Inst. Of Electrical and Electronic Engineers, Sept. 1997, pp.34-35

[Lyles, 1999] LYLES, L. L., Lt. Gen.: "Statement Before the U.S. Senate, Subcommittee on Strategic Forces", 24 March 1999

[Przemieniecki, 2000] PRZEMIENIECKI, J.S.: "Mathematical Methods in Defense Analyses", Third Edition, *Education Series*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (*AIAA*), Inc., Reston, VA 20191-4344, 2000, σελ. 398

[Wilkenning, 1985] WILKENNING, D. A. : "A Simple Model for Calculating Ballistic Missile Effectiveness", *Science and Global Security*, Vol. 8, No. 2, 1999, pp. 124-156

Κεφάλαιο 8

Αιτιοκρατικά Μοντέλα Μαχών που διεξάγονται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων

Στο παρόν *Κεφάλαιο*, θα επανέλθουμε στον προβληματισμό των θεμάτων του 1ου Τόμου, γενικεύοντας τις εκεί θεωρηθείσες έννοιες περί του υπολογισμού των ανά πάσα στιγμή Εναπομενουσών Μονάδων δύο αντιμαχόμενων ***Ομογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών. Προς τούτο, θα παρουσιάσουμε, κατ' αρχή, τα (Αιτιοκρατικά) Μαθηματικά Μοντέλα που μπορούν να περιγράψουν τις Μάχες μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων (: Tactical Engagements of Heterogeneous Forces), και, στη συνέχεια, θα δώσουμε μία Μέθοδο της Αριθμητικής Ανάλυσης βάσει της οποίας θα μπορεί να προσδιορίζεται η ανά πάσα στιγμή διακύμανση των μεγεθών των Εναπομενουσών Δυνάμεων.

Κατόπιν όσων αναφέρθηκαν στον 1ο Τόμο, είναι αναμενόμενο η (Αιτιοκρατική) Μαθηματική Μοντελοποίηση μίας Μάχης μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων να βασίζεται στην θεώρηση των συντελεστών φθερσεπιβολής (: Attrition Coefficients) των δύο Δυνάμεων, τούτη την φορά όμως θεωρουμένων ως πραγματικών συναρτήσεων τόσο των οπλικών χαρακτηριστικών όσο και της Δέσμευσης όπλων που δεσμεύονται εναντίον μίας καθορισμένης αντίπαλης Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης.

Τρία είναι τα βασικά Αιτιοκρατικά Μαθηματικά Μοντέλα Μάχης που θα συζητηθούν: *το Αιτιοκρατικό Μοντέλο Μάχης που διεξάγεται μεταξύ* ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** *Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά* (: Directed Fire "Many-On-Many" Engagement), *το Αιτιοκρατικό Μοντέλο Μάχης που διεξάγεται μεταξύ* ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** *Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Πυρά Περιοχής* (: Area Fire "Many-On-Many" Engagement) και

τέλος, *το Αιτιοκρατικό Μοντέλο Μάχης που διεξάγεται μεταξύ* ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** *Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων σύμφωνα με την Τακτική του Ανταρτοπόλεμου* (: Guerilla Warfare "Many-On-Many" Engagement).

Το Αιτιοκρατικό Μαθηματικό Μοντέλο Μάχης που διεξάγεται μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά μπορεί να περιγραφεί από ένα Σύστημα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων 1^{ης} Τάξης το οποίο δίνεται σε πινακική μορφή. Η αναλυτική λύση αυτού του Συστήματος οδηγεί κατά απόλυτα φυσικό τρόπο στην έννοια της *Παραμέτρου Υπεροχής* (: Superiority Parameter) η οποία αναπαριστά ένα μέτρο της αποτελεσματικότητας των αντιπάλων Δυνάμεων. Η παράμετρος αυτή ορίζεται ως το γινόμενο του (ανάστροφου του) εξ αριστερών υπερέχοντος ιδιοδιανύσματος του πίνακα των συντελεστών φθερσεπιβολής επί το διάνυσμα των μεγεθών της δύο Δυνάμεων. Πρόκειται για μία παράμετρο που χρησιμοποιείται προκειμένου να επιβληθούν κάποια κριτήρια ανωτερότητας για κάθε μία από τις δύο συγκρουόμενες Δυνάμεις. Η εφαρμογή της εν λόγω έννοιας στις Μάχες μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων υλοποιείται στην περίπτωση μίας Τακτικής Μάχης <<Ενός Εναντίον Δύο>> (: "One-On-Two" Tactical Engagement).

Οι διατυπώσεις τόσο του δεύτερου Αιτιοκρατικού Μαθηματικού Μοντέλου περί Μαχών που διεξάγονται μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Πυρά Περιοχής, όσο και του τρίτου Μαθηματικού Μοντέλου που διεξάγεται μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων σύμφωνα με την Τακτική του Ανταρτοπόλεμου, οδηγούν σε αντίστοιχα Συστήματα μη Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων. Εφόσον αυτά τα Συστήματα γραφούν σε πινακική μορφή και χρησιμοποιηθεί μία απλή διαδικασία μετατροπής των πινάκων-στηλών (δηλαδή, των διανυσμάτων) σε διαγώνιους πίνακες, μπορούμε να καταλήξουμε σε πινακικές εξισώσεις οι οποίες επιλύονται (και πάλι) με Μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης.

8.1.Αριθμητική Επίλυση Αιτιοκρατικού Μοντέλου Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά

Στο πρώτο αυτό *Εδάφιο*, θα δώσουμε μία αριθμητική επίλυση (δηλαδή μία λύση η οποία προέρχεται από το επιστημονικό πεδίο του κλάδου των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που φέρει το όνομα <<Αριθμητική Ανάλυση>>) των Αιτιοκρατικών Διαφορικών Εξισώσεων Lanchester.

Όπως είδαμε στην *Παράγραφο Ι.2.Β* του *1^{ου} Τόμου*, ο Τετραγωνικός Νόμος Lanchester περιγράφει την εξέλιξη της Μάχης η οποία διεξάγεται μεταξύ ***Ομογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων, όταν *δεν υπάρχουν Ενισχύσεις, ούτε Λειτουργικές Απώλειες*, και

- *κάθε πλευρά ρίπτει "Στοχευμένα" Πυρά*

και

- *ο Ρυθμός Απωλειών της κάθε πλευράς είναι ανάλογος του πλήθους των εναπομενουσών οπλικών μονάδων της αντίπαλης πλευράς· ο συντελεστής της αναλογίας είναι ο Ρυθμός Φθερσεπιβολής (: ο Συντελεστής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας) της αντίπαλης πλευράς.*

Παράδειγμα τέτοιας Μάχης είναι η Μάχη μεταξύ Τακτικών Συμβατικών (: όχι Αντάρτικων) Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά.

Κάτω από τέτοιες προϋποθέσεις, είναι σαφές ότι πρόκειται για Μάχη κατά την οποία πολλοί πυροβολητές έχουν τη δυνατότητα να πυροβολήσουν εναντίον ενός κοινού Στόχου, και ότι επιπλέον, ο ρυθμός ελάττωσης εκάστης των Δυνάμεων εκλαμβάνεται ως ανάλογος του πληθαρίθμου της αντιπάλου:

$$\frac{dX_1}{dt}(t) = -\theta_2 X_2(t)$$
$$\frac{dX_2}{dt}(t) = -\theta_1 X_1(t)\,.$$

θ_1 και θ_2 είναι οι Ρυθμοί Φθερσεπιβολής των Δυνάμεων 1 και 2 αντιστοίχως, και θεωρούνται ότι:

- *είναι σταθεροί θετικοί αριθμοί*

και

- *οι τιμές τους είναι* a priori *γνωστές* (εκ των προτέρων ή έστω μετά την παρέλευση μικρού χρονικού διαστήματος από της ενάρξεως της Μάχης).

Για την γενικότερη διατύπωση αυτών των Διαφορικών Εξισώσεων έτσι όπως αυτές διαμορφώνονται κατά την περιγραφή μίας Μάχης που διεξάγεται μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο *Ορισμό*:

VIII.1. Ορισμός. ***Έστωσαν οι δύο αντίπαλες Ετερογενώς Οπλισμένες Τακτικές Στρατιωτικές Δυνάμεις 1 και 2.***

Υποθέτουμε ότι η Δύναμη 1 διαθέτει M_1 ***διαφορετικούς τύπους Οπλικών Συστημάτων***

$$\text{ΟΣ}_1^{(1)}, \text{ΟΣ}_1^{(2)}, \ldots, \text{ΟΣ}_1^{(M_1)},$$

με αντίστοιχους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος κατά την χρονική στιγμή t ***από της ενάρξεως της Μάχης***

$$X_1^{(1)} = X_1^{(1)}(t),\ X_1^{(2)} = X_1^{(2)}(t), \cdots X_1^{(M_1)} = X_1^{(M_1)}(t).$$

Ομοίως, ***υποθέτουμε ότι η Δύναμη 2 διαθέτει*** M_2 ***διαφορετικούς τύπους Οπλικών Συστημάτων***

$$\text{ΟΣ}_2^{(1)}, \text{ΟΣ}_2^{(2)}, \ldots, \text{ΟΣ}_2^{(M_2)},$$

με αντίστοιχους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος κατά την χρονική στιγμή t ***από της ενάρξεως της Μάχης***

$$X_2^{(1)} = X_2^{(1)}(t),\ X_2^{(2)} = X_2^{(2)}(t), \cdots X_2^{(M_2)} = X_2^{(M_2)}(t).$$

(i). ***Συμβολίζουμε με*** $X_1 = X_1(t)$ ***τον (μη αρνητικό) πίνακα στήλη***

$$X_1 = X_1(t) = \left[X_1^{(1)}\ X_1^{(2)} \cdots X_1^{(M_1)}\right]^T = \left[X_1^{(1)}(t)\ X_1^{(2)}(t) \cdots X_1^{(M_1)}(t)\right]^T$$

και με $X_2 = X_2(t)$ ***τον (μη αρνητικό) πίνακα στήλη***

$$X_2 = X_2(t) = \left[X_2^{(1)}\ X_2^{(2)} \cdots X_2^{(M_2)}\right]^T = \left[X_2^{(1)}(t)\ X_2^{(2)}(t) \cdots X_2^{(M_2)}(t)\right]^T.$$

(ii). ***Ακόμη, για κάθε*** $i = 1,2,\ldots,M_1$ ***και*** $j = 1,2,\ldots,M_2$***, ορίζουμε τον*** $(i \to j)$***−Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή*** $(i \to j)$***−Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Δύναμης 1 εναντίον της Δύναμης 2:***

$$\theta_1^{(i\to j)} = \theta_1^{(i\to j)}(t, x, y, z, X_1, X_2) \geq 0$$

ως τον ρυθμό της συνολικής φθοράς που προκαλούν όλες οι (ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\text{ΟΣ}_1^{(i)}$ ***της Δύναμης 1 σε βάρος των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\text{ΟΣ}_2^{(j)}$ ***της Δύναμης 2.***

Ομοίως, ***για κάθε*** $j = 1,2,\ldots,M_2$ ***και*** $i = 1,2,\ldots,M_1$***, ορίζουμε τον*** $(j \to i)$***−Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή*** $(j \to i)$***−Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Δύναμης 2***

εναντίον της Δύναμης 1:

$$\theta_2^{(j\to i)} = \theta_2^{(j\to i)}\left(t, x, y, z, X_1, X_2\right) \geq 0$$

ως τον ρυθμό της συνολικής φθοράς που προκαλούν όλες οι (ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ ***της Δύναμης 2 σε βάρος των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ ***της Δύναμης 1.***

(iii). Ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής της Δύναμης 1 εναντίον της Δύναμης 2 ορίζεται ως ο $(M_2 \times M_1)$ ***μη αρνητικός πίνακας***

$$\Theta_1 := \left(\theta_1^{(i\to j)}\right)_{j,i} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(1\to 1)} & \theta_1^{(2\to 1)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to 1)} \\ \theta_1^{(1\to 2)} & \theta_1^{(2\to 2)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{(1\to M_2)} & \theta_1^{(2\to M_2)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to M_2)} \end{pmatrix}.$$

Ομοίως, ***ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής της Δύναμης 2 εναντίον της Δύναμης 1 ορίζεται ως ο*** $(M_1 \times M_2)$ ***πίνακας***

$$\Theta_2 := \left(\theta_2^{(j\to i)}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \theta_2^{(1\to 1)} & \theta_2^{(2\to 1)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to 1)} \\ \theta_2^{(1\to 2)} & \theta_2^{(2\to 2)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2^{(1\to M_1)} & \theta_2^{(2\to M_1)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to M_1)} \end{pmatrix}.\blacksquare$$

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε το Αιτιοκρατικό Μαθηματικό Μοντέλο Lanchester που περιγράφει κάθε Μάχη που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών:

<u>ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LANCHESTER</u>

(για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών):

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -\Theta_2 X_2 \\ \dot{X}_2 &= -\Theta_1 X_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

ή σε ακόμα πιο αναλυτική μορφή

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

ΤΩΝ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

(για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών):

$$\frac{dX_1^{(1)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to 1)} X_2^{(1)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_2^{(2)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_2^{(M_2)}$$

$$\frac{dX_1^{(2)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to 2)} X_2^{(1)} - \theta_2^{(2\to 2)} X_2^{(2)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 2)} X_2^{(M_2)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dX_1^{(M_1)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to M_1)} X_2^{(1)} - \theta_2^{(2\to M_1)} X_2^{(2)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to M_1)} X_2^{(M_2)}$$

$$\frac{dX_2^{(1)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to 1)} X_1^{(1)} - \theta_1^{(2\to 1)} X_1^{(2)} - \cdots - \theta_1^{(M_1\to 1)} X_1^{(M_1)}$$

$$\frac{dX_2^{(2)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to 2)} X_1^{(1)} - \theta_1^{(2\to 2)} X_1^{(2)} - \cdots - \theta_1^{(M_1\to 2)} X_1^{(M_1)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dX_2^{(M_2)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to M_2)} X_1^{(1)} - \theta_1^{(2\to M_2)} X_1^{(2)} - \cdots - \theta_1^{(M_1\to M_2)} X_1^{(M_1)}$$

VIII.2. Παρατήρηση. Ένας ακριβής προσδιορισμός των $(i \to j)-$Συντελεστών Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας $\theta_1^{(i\to j)} = \theta_1^{(i\to j)}(t, x, y, z, X_1, X_2)$ της Δύναμης 1 εναντίον της Δύναμης 2 προαπαιτεί την συνεκτίμηση όλων των επί μέρους ***Παραγόντων Οπλικής Δέσμευσης*** (: Weapon Allocation Factors). Με άλλα λόγια, ο υπολογισμός των Συντελεστών $\theta_1^{(i\to j)}$ πρέπει να εμπεριέχει την Δέσμευση των $X_1^{(i)} = X_1^{(i)}(t)$ (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ της Δύναμης 1 εναντίον των

$$X_2^{(1)} = X_2^{(1)}(t), X_2^{(2)} = X_2^{(2)}(t), \ldots, X_2^{(j)} = X_2^{(j)}(t), \ldots, X_2^{(M_2)} = X_2^{(M_2)}(t)$$

(ομοειδών) Οπλικών Μονάδων κάθε αντίστοιχου Οπλικού Συστήματος

$$\text{ΟΣ}_2^{(1)}, \text{ΟΣ}_2^{(2)}, \ldots \text{ΟΣ}_2^{(j)}, \ldots, \text{ΟΣ}_2^{(M_2)}$$

της Δύναμης 2.

Αυτό συνεπάγεται ότι ο $(i \to j)-$Συντελεστής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας της Δύναμης 1 εναντίον της Δύναμης 2 μπορεί να γράφεται και υπό την μορφή:

$$\theta_1^{(i\to j)} = a_1^{(i\to j)} \alpha_1^{(i\to j)}, \qquad (2)$$

όπου

- $a_1^{(i\to j)} = a_1^{(i\to j)}(t)$***: ο ρυθμός κατά τον οποίο, την χρονική στιγμή*** t***, προκαλούνται Απώλειες από την Δύναμη 1 στην Δύναμη 2 όταν οι*** $X_1^{(i)} = X_1^{(i)}(t)$ ***(ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος*** $\text{ΟΣ}_1^{(i)}$ ***της Δύναμης 1 βάλλουν κατά των*** $X_2^{(j)} = X_2^{(j)}(t)$ ***(ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\text{ΟΣ}_2^{(j)}$ ***της Δύναμης 2,***
- $\alpha_1^{(i\to j)} = \alpha_1^{(i\to j)}$***: ο Παράγοντας Οπλικής Δέσμευσης που δίνει το ποσοστό επί συνόλου*** $X_1^{(i)} = X_1^{(i)}(t)$ ***των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\text{ΟΣ}_1^{(i)}$ ***της Δύναμης 1 που σφραγίζονται εναντίον των*** $X_2^{(j)} = X_2^{(j)}(t)$ ***(ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\text{ΟΣ}_2^{(j)}$ ***της Δύναμης 2.***

Είναι σαφές ότι οι αυτοί οι Παράγοντες Οπλικής Δέσμευσης πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη προφανή εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{M_2} \alpha_1^{(i\to j)} \le 1. \qquad (3)$$

Φυσικά, ανάλογες εξισώσεις με τις (2) και (3) ισχύουν και για τους $(j \to i)-$Συντελεστές Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας της Δύναμης 2 εναντίον της Δύναμης 1. Επί του προκειμένου, ο $(j \to i)-$Συντελεστής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας της Δύναμης 2 εναντίον της Δύναμης 1 μπορεί να γράφεται και υπό την μορφή:

$$\theta_2^{(j\to i)} = a_2^{(j\to i)} \alpha_2^{(j\to i)}, \qquad (4)$$

όπου

- $a_2^{(j\to i)} = a_2^{(j\to i)}(t)$: ***ο ρυθμός κατά τον οποίο, την χρονική στιγμή*** t***, προκαλούνται Απώλειες από την Δύναμη 2 στην Δύναμη 1 όταν οι*** $X_2^{(j)} = X_2^{(j)}(t)$ ***(ομοειδείς)***

Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ ***της Δύναμης 2 βάλλουν κατά των*** $X_1^{(i)} = X_1^{(i)}(t)$ ***(ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ ***της Δύναμης 1,***

- $\alpha_2^{(j\to i)} = \alpha_2^{(j\to i)}$***: ο Παράγοντας Οπλικής Δέσμευσης που δίνει το ποσοστό επί συνόλου*** $X_2^{(j)} = X_2^{(j)}(t)$ ***των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ ***της Δύναμης 2 που σφραγίζονται εναντίον των*** $X_2^{(j)} = X_2^{(j)}(t)$ ***(ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος*** $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ ***της Δύναμης 1.***

Και πάλι είναι σαφές ότι οι αυτοί οι Παράγοντες Οπλικής Δέσμευσης πρέπει να ικανοποιούν την ακόλουθη προφανή εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{M_1} \alpha_2^{(j\to i)} \le 1 . \ \blacksquare \qquad (4)$$

Το *Σύστημα* (1) των Διαφορικών Εξισώσεων Lanchester για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών μπορεί να γραφεί κατά ενιαίο τρόπο όπως ακολούθως:

ΕΝΙΑΙΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ

ΤΩΝ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

(για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών):

$$\dot{\mathrm{X}} = \Theta \mathrm{X} \qquad (5)$$

όπου θέσαμε

$$\mathrm{X} := [X_1 \quad X_2]^T \qquad (6)$$

και όπου Θ είναι ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής των δύο Δυνάμεων, ήτοι ο μη αρνητικός $(M_1 + M_2)\times(M_1 + M_2)$ πίνακας

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix} . \qquad (7)$$

VIII.3. Παρατηρήσεις σχετικά με την Αναλυτική Επίλυση του Διαφορικού Συστήματος (5): Η γενική βασική λύση, και τα εκ δεξιών και εξ αριστερών γενικευμένα Ιδιοδιανύσματα.

- Όπως είναι γνωστό, η γενική βασική λύση του *Διαφορικού Συστήματος* (5)

$$\dot{\mathrm{X}} = \Theta \mathrm{X}$$

δίνεται ως ένα γινόμενο της μορφής:

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\,\varphi \qquad (8)$$

όπου

P ***είναι ο πίνακας των εκ δεξιών γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα*** Θ

και

φ είναι ένας πίνακας-στήλη με στοιχεία συναρτήσεις του χρόνου ([Δάρας, 2001/ΙΙ]).

Αντικατάσταση της (8) εντός της (5) δίνει την *Σχέση*:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{P}\,\dot{\varphi} = \Theta\,\mathrm{P}\,\varphi$$

από την οποία έπεται ότι

$$\dot{\varphi} = \mathrm{P}^{-1}\Theta\,\mathrm{P}\,\varphi = J\,\varphi\,, \qquad (9)$$

όπου

$$\varphi = \left(\varphi^{(1)}\,\varphi^{(2)}\ldots\varphi^{(i)}\ldots\varphi^{(M_1+M_2)}\right)^T \qquad (10)$$

$$\dot{\varphi} = \left(\dot{\varphi}^{(1)}\,\dot{\varphi}^{(2)}\ldots\dot{\varphi}^{(i)}\ldots\dot{\varphi}^{(M_1+M_2)}\right)^T \qquad (11)$$

και όπου

$$J = \mathrm{P}^{-1}\Theta\mathrm{P} \qquad (12a)$$

$$= \begin{pmatrix} J^{(1)} & & & & \\ & J^{(2)} & & \mathrm{O} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathrm{O} & & J^{(i)} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (12b)$$

είναι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα Θ (βλέπε [Δάρας, 2008], *Θεώρημα Ι.5.3.1* της σελίδας 52).

- Κατόπιν των όσων αναφέρθηκαν, ο γενικός τυπικός δομικός όρος του Διαφορικού Συστήματος (9) είναι της μορφής:

$$\dot{\varphi}^{(i)} = J^{(i)}\,\varphi^{(i)}, \qquad (13)$$

όπου

$$\varphi^{(i)} = \left(\varphi_1^{(i)}\,\varphi_2^{(i)}\ldots\varphi_k^{(i)}\right)^T_{k\times 1}, \qquad (14)$$

$$\dot{\varphi}^{(i)} = \left(\dot{\varphi}_1^{(i)}\,\dot{\varphi}_2^{(i)}\ldots\dot{\varphi}_k^{(i)}\right)^T_{k\times 1}, \qquad (15)$$

και όπου ο πίνακας $J^{(i)}$ έχει μορφή που μπορεί να δίνεται από τους ακόλουθους τρεις βασικούς μορφολογικούς *Τύπους*, ή από κάποιους γραμμικούς συνδυασμούς τους:

•*Τύπος 1ος*:

$$J^{(i)} = \lambda_i , \qquad (16)$$

όταν η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ισούται με 1,

•*Τύπος 2ος*:

$$J^{(i)} = \lambda_i \mathrm{I}_k \qquad (17)$$

(I_k :ο μοναδιαίος $k \times k$ πίνακας), όταν η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ισούται με $k \geq 2$, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα,

•*Τύπος 3ος*:

$$J^{(i)} = \lambda_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{k \times k} , \qquad (18)$$

όταν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i υπερβαίνει την γεωμετρική της πολλαπλότητα.

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε πως όταν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i υπερβαίνει την γεωμετρική της πολλαπλότητα, δηλαδή όταν ο πίνακας $J^{(i)}$ έχει μορφή που δίνεται από τον *3ο Τύπο* (18), τότε η λύση $\varphi^{(i)} = \left(\varphi_1^{(i)} \varphi_2^{(i)} \ldots \varphi_k^{(i)}\right)_{k\times 1}^T$ της *Διαφορικής Εξίσωσης* (13) μπορεί να προκύψει επιλύοντας την (13) αρχικά ως προς $\varphi_1^{(i)}$, ακολούθως αντικαθιστώντας την ευρεθείσα $\varphi_1^{(i)}$ μέσα στην (13) και επιλύοντας την *Εξίσωση* που θα προκύψει ως προς $\varphi_2^{(i)}$, μετά αντικαθιστώντας την ευρεθείσα $\varphi_2^{(i)}$ μέσα στην προηγούμενη και επιλύοντας την *Εξίσωση* που θα προκύψει ως προς $\varphi_3^{(i)}$, κ. ο. κ. Στην περίπτωση αυτή, η διανυσματική λύση $\varphi^{(i)}$ μπορεί να αποδοθεί συνοπτικά από την έκφραση:

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(i)}(t) = \exp(\lambda_i t)\left[\mathrm{I} + \frac{\lambda_i t}{1!}\mathrm{H}_1 + \frac{(\lambda_i t)^2}{2!}\mathrm{H}_2 + \cdots\right] C^{(i)} \qquad (19a)$$

$$= \exp(\lambda_i t)\left[\mathrm{I} + \frac{\lambda_i t}{1!}\mathrm{H} + \frac{(\lambda_i t)^2}{2!}\mathrm{H}^2 + \cdots\right] C^{(i)} \qquad (19b)$$

$$= \exp(\lambda_i t)\, D^{(i)}\, C^{(i)}, \qquad (19c)$$

όπου

$$D^{(i)} = \mathrm{I} + \frac{\lambda_i t}{1!}\mathrm{H} + \frac{(\lambda_i t)^2}{2!}\mathrm{H}^2 + \cdots + \frac{(\lambda_i t)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{H}^{k-1} \qquad (20a)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \lambda_i t & 1 & & & \mathrm{O} & \\ \frac{1}{2!}(\lambda_i t)^2 & \lambda_i t & 1 & & & \\ \frac{1}{3!}(\lambda_i t)^3 & \frac{1}{2!}(\lambda_i t)^2 & \lambda_i t & 1 & & \\ \frac{1}{4!}(\lambda_i t)^4 & \frac{1}{3!}(\lambda_i t)^3 & \frac{1}{2!}(\lambda_i t)^2 & \lambda_i t & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (20b)$$

και όπου

$$C^{(i)} := \left(\sigma_1^{(i)}\ \sigma_2^{(i)} \cdots \sigma_k^{(i)}\right)^T \qquad (21)$$

είναι ο πίνακας-στήλη των σταθερών της ολοκλήρωσης. Οι πίνακες H, H_1, H_2,... δίνονται από τις *Σχέσεις*:

$$\mathrm{H}_1 := \mathrm{H} := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & \mathrm{O} & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}_{k\times k} \qquad (22)$$

$$\mathrm{H}_2 := \mathrm{H}^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & \mathrm{O} & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}_{k\times k}, \qquad (23)$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{H}^k = \mathrm{O}. \qquad (24)$$

- Πρέπει να σημειωθεί πως όταν η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητά της, δηλαδή όταν ο πίνακας $J^{(i)}$ έχει μορφή που δίνεται από τον *2ο Τύπο* (17), τότε

$$D^{(i)} = 1$$

και η λύση $\varphi^{(i)} = \left(\varphi_1^{(i)}\, \varphi_2^{(i)} \ldots \varphi_k^{(i)}\right)^T_{k\times 1}$ της Διαφορικής Εξίσωσης (13) μπορεί να αποδοθεί συνοπτικά από την έκφραση:

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(i)}(t) = \exp(\lambda_i\, t)\, C^{(i)} \qquad (25)$$

όπου και πάλι

$$C^{(i)} := \left(\sigma_1^{(i)}\ \sigma_2^{(i)} \cdots \sigma_k^{(i)}\right)^T \qquad (26)$$

είναι ο πίνακας-στήλη των σταθερών ολοκλήρωσης.

- Κατόπιν των όσων προηγήθηκαν, αντικαθιστώντας την έκφραση $(19c)$ (ή την έκφραση (25)) μέσα στις *Σχέσεις* (10) και (8), συμπεραίνουμε ότι ***η γενική λύση της*** (5) ***δίνεται από τον Τύπο***:

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\,\varphi = \mathrm{P}\left[\exp(\lambda\, t)\, D\right] C, \qquad (27)$$

όπου

$$\left[\exp(\lambda\, t)\, D\right] = \left[\exp(\lambda_1\, t) D^{(1)} \quad \exp(\lambda_2\, t) D^{(2)} \quad \cdots\right] \qquad (28)$$

και

$$C = \left(C^{(1)}\ C^{(2)} \cdots\right)^T. \qquad (29)$$

Ιδιαιτέρως, κατά την χρονική στιγμή $t = 0$, έχουμε $\mathrm{X} = \mathrm{X}^0$. Ως εκ τούτου, από την *Εξίσωση* (27), επειδή $\exp(0) = 1$ και $D = \mathrm{I}$, προκύπτει ότι $\mathrm{X}^0 = \mathrm{P}\, C$. Επομένως, ισχύει ότι

$$C = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X}^{0} = Q^{T}\mathrm{X}^{0}, \qquad (30)$$

όπου ο πίνακας Q ορίζεται σύμφωνα προς την *Σχέση*:

$$Q := \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^{T}. \qquad (31)$$

Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο γενικό συμπέρασμα ότι

η γενική λύση της (5) ***δίνεται από τον Τύπο:***

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\,\varphi = \mathrm{P}\left[\exp(\lambda\, t)\, D\right] Q^{T}\mathrm{X}^{0}, \qquad (32)$$

όπου

$$\left[\exp(\lambda\, t)\, D\right] = \left[\exp(\lambda_{1}\, t) D^{(1)} \quad \exp(\lambda_{2}\, t) D^{(2)} \quad \cdots\right], \qquad (33)$$

και

$$Q := \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^{T}. \qquad (34)$$

- Από τις *Εξισώσεις* $(12a)$ και (34), έπονται οι ακόλουθες τέσσερις *Σχέσεις*:

$$\Theta\,\mathrm{P} = \mathrm{P}\,J, \qquad (35)$$

$$Q^{T}\,\mathrm{P} = \mathrm{I}, \qquad (36)$$

$$\mathrm{P}\,Q^{T} = \mathrm{I}, \text{ και} \qquad (37)$$

$$Q^{T}\Theta = \mathrm{P}^{-1}\Theta = \mathrm{P}^{-1}\Theta\,\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1} = J\,Q^{T}. \qquad (38)$$

Ιδιαιτέρως,

η τελευταία *Εξίσωση* (38) συνεπάγεται ότι ***ο πίνακας*** $Q = \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^{T}$ ***είναι ο πίνακας των εξ αριστερών γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων***,

ενώ

οι *Εξισώσεις* (36) και (37) καταδεικνύουν την Σχέση Ορθογωνιότητας που ισχύει μεταξύ των εκ δεξιών γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων P του πίνακα Θ και των εξ αριστερών γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων Q του πίνακα Θ .■

VIII.4. Αριθμητική Επίλυση του Διαφορικού Συστήματος (5). Υπάρχουν διάφοροι γνωστοί τρόποι *Αριθμητικής Ολοκλήρωσης* του Διαφορικού Συστήματος (5). Ο πιο απλός τρόπος, προέρχεται από τον *Τύπο*:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{X}_{n}\right) = \Theta\,\mathrm{X}_{n}$$

ο οποίος οδηγεί απ' ευθείας στο ακόλουθο ***Γραμμικό*** *Αριθμητικό Σχήμα*:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

$$\mathrm{X}_{n+1} = \left(\mathrm{I}_n + \Delta t_n\ \Theta\right)\mathrm{X}_n \quad (n = 0,1,2,\ldots N) \qquad (39a)$$

όπου

- X_n και X_{n+1} αναπαριστούν τις διανυσματικές τιμές του πίνακα-στήλη $\mathrm{X} := \left[X_1 \quad X_2\right]^T$ κατά τις χρονικές στιγμές t_n και t_{n+1}, αντιστοίχως, και
- $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$ είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης. ■

VIII.5. Παρατήρηση. Εάν κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος $\left[t_n, t_{n+1}\right]$, υπάρξουν Ενισχύσεις ή Αποσύρσεις Μονάδων κάποιων Οπλικών Συστημάτων από την Μάχη, τότε το *Αριθμητικό Σχήμα* $(39a)$ οφείλει να διασκευασθεί ως ακολούθως:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΙΣΧΥΣΕΩΝ Ή ΑΠΟΣΥΡΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$\mathrm{X}_{n+1} = \left(\mathrm{I}_n + \Delta t_n\ \Theta\right)\mathrm{X}_n + \mathrm{E}_n \quad (n = 0,1,2,\ldots N) \qquad (39b)$$

όπου

- X_n και X_{n+1} αναπαριστούν και πάλι τον πίνακα-στήλη $\mathrm{X} = \mathrm{X}(t) := \left[X_1 \quad X_2\right]^T = \left[X_1(t) \quad X_2(t)\right]^T$ κατά τις στιγμές t_n και t_{n+1}, αντιστοίχως,
- $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$ είναι και πάλι το μήκος του χρονικού διαστήματος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης, και
- E_n είναι ο πίνακας-στήλη

$$\mathrm{E}_n = \begin{pmatrix} E_1^{(1)}(\Delta t_n) \\ E_1^{(2)}(\Delta t_n) \\ \vdots \\ E_1^{(M_1)}(\Delta t_n) \\ E_2^{(1)}(\Delta t_n) \\ E_2^{(2)}(\Delta t_n) \\ \vdots \\ E_2^{(M_2)}(\Delta t_n) \end{pmatrix}$$

ο οποίος στις πρώτες M_1 γραμμές του αποδίδει το πλήθος των Μονάδων $E_1^{(i)}(\Delta t_n)$ των Ενισχύσεων ή Αποσύρσεων για κάθε Οπλικό Σύστημα $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots,M_1)$ της Δύναμης 1 κατά την διάρκεια Δt_n του χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$,ενώ στις επόμενες M_2 γραμμές του αποδίδει το πλήθος των Μονάδων $E_2^{(j)}(\Delta t_n)$ των Ενισχύσεων ή Αποσύρσεων για κάθε Οπλικό Σύστημα $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ $(j = 1,2,\ldots,M_2)$ της Δύναμης 2 κατά την διάρκεια Δt_n του ιδίου χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$. ■

VIII.6. Παρατήρηση. Εάν (σε κάποια χρονική στιγμή της Μάχης) όλα τα στοιχεία της $\kappa-$οστής γραμμής του πίνακα Θ καταστούν ίσα με μηδέν, τότε (,επειδή θα έχει προκύψει η *Σχέση* $\dot{X}_\kappa = 0$,) όλες ***οι εναπομένουσες μονάδες του Οπλικού Συστήματος εκείνου που αντιστοιχεί στην $\kappa-$οστή γραμμή του πίνακα Θ*** ***<u>δεν θα δέχονται πλέον εφεξής Εχθρικά Πυρά εναντίον τους</u>***. Στην περίπτωση αυτή, η $\kappa-$οστή γραμμή του πίνακα Θ θα πρέπει να απαλειφτεί, ενώ η $\kappa-$οστή στήλη πολλαπλασιασμένη επί το σταθερό πλέον μέγεθος X_κ (όλων των εναπομενουσών μονάδων του Οπλικού Συστήματος δεν θα δέχονται πλέον εφεξής Εχθρικά Πυρά εναντίον τους) θα πρέπει να μετακινηθεί και να ενσωματωθεί μέσα στον πίνακα στήλη E_n.Έτσι, στην περίπτωση αυτή, η θεμελιώδης εξίσωση του ανά πάσα στιγμή

προσδιορισμού των εναπομενουσών μονάδων των Οπλικών Συστημάτων των δύο αντιμαχόμενων Δυνάμεων θα είναι η *Εξίσωση* $(39b)$, με μόνες διαφορές ότι

- ο $(M_1+M_2)\times(M_1+M_2)$ πίνακας Θ θα πρέπει να περιορισθεί σε έναν $([M_1-1]+[M_2-1])\times([M_1-1]+[M_2-1])$ πίνακα

και

- ο $(M_1+M_2)\times 1$ πίνακας-στήλη E_n θα πρέπει να περιορισθεί σε έναν $([M_1-1]+[M_2-1])\times 1$ πίνακα-στήλη

Αντιθέτως, εάν (σε κάποια χρονική στιγμή της Μάχης) όλα τα στοιχεία της $\lambda-$οστής στήλης του πίνακα Θ καταστούν ίσα με μηδέν, τότε ***όλες οι εναπομένουσες μονάδες του Οπλικού Συστήματος εκείνου που αντιστοιχεί στην*** $\lambda-$***οστή γραμμή του πίνακα*** Θ ***θα δέχονται Εχθρικά Πυρά εναντίον τους χωρίς να μπορούν να ανταποδώσουν***. Στην περίπτωση αυτή, η θεμελιώδης εξίσωση του ανά πάσα στιγμή προσδιορισμού των εναπομενουσών μονάδων των Οπλικών Συστημάτων των δύο αντιμαχόμενων Δυνάμεων θα είναι και πάλι η *Εξίσωση* $(39b)$. ■

8.2.Συνάθροιση Δυνάμεων

Όπως επισημάνθηκε στην εργασία [Taylor, 1983], υπάρχουν πολλοί συγγραφείς οι οποίοι εισήγαγαν και χρησιμοποίησαν εκουσίως ή ακουσίως την ***Συνάθροιση Δυνάμεων*** (: Aggregated Forces) προκειμένου να αναβαθμίσουν την δυνατότητα πλήρους επίγνωσης είτε ασφαλούς πρόβλεψης περί

- των συνεπειών που μπορεί να επιφέρει στην εξέλιξη της Μάχης η διακύμανση του Μεγέθους των αντιπάλων Δυνάμεων,
- των αμοιβαίων Οπλικών Δεσμεύσεων, και
- των (σύμφωνα προς το *Διαφορικό Σύστημα* (5)) Ποσοστών Οπλικής Ευστοχίας των αντιπάλων Δυνάμεων.

Η προσέγγιση αυτή των συγγραφέων περιλάμβανε πρωτίστως τον υπολογισμό των ακολούθων δύο βασικών διανυσματικών ποσοτήτων:

1) του ***Μεγέθους***

$$\Sigma_1 = \Sigma_1(t) := \widetilde{V}_1^T X_1 = \widetilde{V}_1^T(t) X_1(t) \qquad (40)$$

της Συνάθροισης Δυνάμεων για την Δύναμη 1, και

2) του ***Μεγέθους***

$$\Sigma_2 = \Sigma_2(t) := \widetilde{V}_2^T X_2 = \widetilde{V}_2^T(t) X_2(t) \qquad (41)$$

της Συνάθροισης Δυνάμεων για την αντίπαλη Δύναμη 2.

Στους ανωτέρω *Τύπους* (40) και (41), τα σύμβολα X_1 και X_2 αναπαριστούν, όπως προηγουμένως, τις στήλες

$$X_1 = X_1(t) = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ \vdots \\ X_1^{(M_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}(t) \\ X_1^{(2)}(t) \\ \vdots \\ X_1^{(M_1)}(t) \end{pmatrix} \text{ και } X_2 = X_2(t) = \begin{pmatrix} X_2^{(1)} \\ X_2^{(2)} \\ \vdots \\ X_2^{(M_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2^{(1)}(t) \\ X_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ X_2^{(M_2)}(t) \end{pmatrix}$$

οι οποίες, κατά την χρονική στιγμή t από της ενάρξεως της Μάχης, έχουν συνιστώσες τους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος. Επίσης, τα σύμβολα $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$ αναπαριστούν τους ανάστροφους

$$\widetilde{V}_1^T = (\widetilde{v}_1^{(1)}\, \widetilde{v}_1^{(2)} \cdots \widetilde{v}_1^{(M_1)}) = (\widetilde{v}_1^{(1)}(t)\ \widetilde{v}_1^{(2)}(t) \cdots \widetilde{v}_1^{(M_1)}(t))$$

και

$$\widetilde{V}_2^T = (\widetilde{v}_2^{(1)}\, \widetilde{v}_2^{(2)} \cdots \widetilde{v}_2^{(M_2)}) = (\widetilde{v}_2^{(1)}(t)\ \widetilde{v}_2^{(2)}(t) \cdots \widetilde{v}_2^{(M_2)}(t))$$

των πινάκων-στηλών (:διανυσμάτων) των οποίων οι συνιστώσες

$$\widetilde{v}_i^{(j)} = \widetilde{v}_i^{(j)}(t) \qquad (i = 1,2 \text{ και } j = 1,2,\ldots,M_i)$$

κατά την χρονική στιγμή t από της ενάρξεως της Μάχης, αναπαριστούν σχετικές τιμές για τα επιμέρους είδη Οπλικών Συστημάτων των αντιπάλων Δυνάμεων 1 και 2.[1] Πιο

συγκεκριμένα, κάποιοι από τους συγγραφείς όρισαν τα σύμβολα $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$ χρησιμοποιώντας την *Μέθοδο των Ιδιοδιανυσμάτων* (βλέπε παρακάτω *Εξισώσεις* (51) και (52)). Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί ότι η εφαρμογή της *Μεθόδου* αυτής θα μπορούσε ενδεχομένως να οδηγήσει σ' έναν εσφαλμένο ορισμό αμφοτέρων των συμβόλων $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$ κατ' απόκλιση μίας πολλαπλασιαστικής πραγματικής σταθερής. Άλλοι πάλι συγγραφείς όρισαν τα σύμβολα $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$ χρησιμοποιώντας ποικίλους τρόπους. Για παράδειγμα, το 1983 ο J. G. Taylor, στην εργασία του [Taylor, 1983] περί των Μοντέλων Μάχης Lanchester, συγκέντρωσε και παρέθεσε τρία διαφορετικά *Σχήματα* για τον καθορισμό των αριθμητικών συνιστωσών

$$\widetilde{v}_i^{(j)} = \widetilde{v}_i^{(j)}(t) \quad (i = 1,2 \text{ και } j = 1,2,\ldots,M_i)\,.$$ [2]

Στα επόμενα δύο *Εδάφια* του παρόντος *Κεφαλαίου*, θα δώσουμε μία *Μέθοδο* προσδιορισμού των ιδιοδιανυσμάτων $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$ στηριζόμενοι αφενός σε μία μαθηματική αναπαράσταση της πλήρους αναλυτικής λύσης της Διαφορικής Εξίσωσης (5), καθώς και αφετέρου στην θεώρηση του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος $\widetilde{q}$ του μη αρνητικού πίνακα που ορίζει ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας (δηλαδή, ο Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής) των δύο Δυνάμεων. ([Przemieniecki,1988]). Όπως θα φανεί στην πορεία, οι ιδέες της *Μεθόδου* αυτής θα οδηγήσουν επίσης στην θεώρηση ενός ***Μέτρου Αποτελεσματικότητας*** (:Measure of Effectiveness)

---

[1] Μία απλή και κλασσική αριθμητική *Σχέση* που συνδέει τις ποσότητες

$$v_i^{(j)} = v_i^{(j)}(t) \quad (i = 1,2 \text{ και } j = 1,2,\ldots,M_i)$$

προτάθηκε τον Ιούλιο του 1971 από τους D. P. Dare και B. A. P. James στην εργασία τους [Dare James, 1971]. Σύμφωνα με την εργασία αυτή, θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{k=1}^{M_1} \widetilde{v}_1^{(k)} = \sum_{l=1}^{M_2} \widetilde{v}_2^{(l)} = 1\,.$$

[2] Τα *Σχήματα* αυτά προέρχονταν από τις προγενέστερες εργασίες [Spudich, 1968], [Howes Thrall, 1973], [Holter, 1973] και [Anderson, 1979] των J. Spudich, D. R. Howes -R. M. Trall, W. H. Holter, και L. B. Anderson αντιστοίχως.

$$\tilde{q}\,[\mathrm{X}(0)]^T$$

(όπου $[\mathrm{X}(0)]^T := [X_1(0)\ \ X_2(0)]$), καθώς και στην αντίστοιχη προς αυτό ***Παράμετρο Υπεροχής*** (: Superiority Parameter)

$$S_0.$$

Αυτά τα δύο αριθμητικά μεγέθη διαμορφώνουν a priori από κοινού μία προοπτική ως προς την έκβαση των τελικών αποτελεσμάτων της Μάχης, υπό την έννοια ότι μπορεί κανείς να δώσει μία πρόβλεψη για την Νίκη της μίας ή της άλλης Πλευράς, χωρίς προς τούτο να είναι αναγκαία η επίλυση των Εξισώσεων του Διαφορικού Συστήματος που περιγράφει την Μάχη.

Τέλος, το *Εδάφιο 8.5*, θα δοθεί μία εφαρμογή της ανωτέρω *Μεθόδου* στην περίπτωση σύγκρουσης δύο Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων σε Μάχη κατά την οποία η μία Δύναμη χρησιμοποιεί μόνον ένα είδος Οπλικών Συστημάτων ενώ η αντίπαλή της διαθέτει δύο διαφορετικά είδη Οπλικών Συστημάτων.

8.3.Παράμετροι Υπεροχής

Όπως είδαμε στ0 *Εδάφιο 8.1*, ο Ενιαίος Τρόπος Διατύπωσης των Αιτιοκρατικών Διαφορικών Εξισώσεων Lanchester για την περιγραφή μίας Μάχης που διεξάγεται μεταξύ δύο Ετερογενώς οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών συνοψίζεται στην διανυσματική Διαφορική Εξίσωση

$$\dot{\mathrm{X}} = \Theta\mathrm{X}, \qquad (42)$$

μέσα στην οποία χρησιμοποιήθηκαν οι συμβολισμοί:

$$\mathrm{X} := [X_1\ \ X_2]^T \qquad (43)$$

και

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix} : (M_1 + M_2)\times(M_1 + M_2) \text{ πίνακας} \qquad (44)$$

Στο παρόν *Εδάφιο*, θα διερευνηθεί η δυνατότητα ύπαρξης και καθορισμού μίας χαρακτηριστικής αριθμητικής παραμέτρου, αναλόγως προς τις τιμές της οποίας θα μπορούσε κανείς να δώσει αμέσως μία αρχική εκτίμηση για τον τελικό Νικητή μίας Μάχης παρακάμπτοντας τελείως την διαδικασία επίλυσης της ανωτέρω *Εξίσωσης* (42).

Για τον σκοπό αυτόν, είναι κατ' αρχήν, αναγκαίο να εντοπίσουμε το εξ αριστερών κυρίαρχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ του πίνακα Θ το οποίο αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμή λ_1 του Θ.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα εξ αριστερών γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα q του πίνακα Θ, καθώς και η αντίστοιχη προς αυτό ιδιοτιμή λ, ορίζονται από την *Εξίσωση*:

$$q^T \Theta = \lambda\, q^T \left(\Leftrightarrow \Theta^T q = \lambda q\right).^{(1)} \qquad (45)$$

Είναι φανερό ότι, από κατασκευής, κάθε τέτοιο εξ αριστερών γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα q του πίνακα Θ είναι μία στήλη με $M_1 + M_2$ γραμμές και, ως εκ τούτου, μπορεί να γραφεί υπό την μορφή:

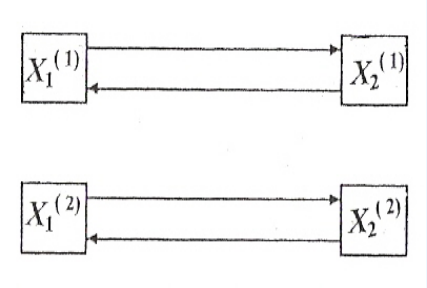
$$q = \begin{pmatrix} c_1 V_1 \\ c_2 V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, M_1 \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \\ \}\, M_2 \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \end{matrix} \qquad (46)$$

όπου τα διανύσματα V_1 και V_2 είναι ιδιοδιανύσματα των πινάκων Θ_1 και Θ_2 αντιστοίχως, και γράφονται κατά (μοναδικό) τρόπο έτσι ώστε η μεγαλύτερη συνιστώσα τους να ισούται με 1.

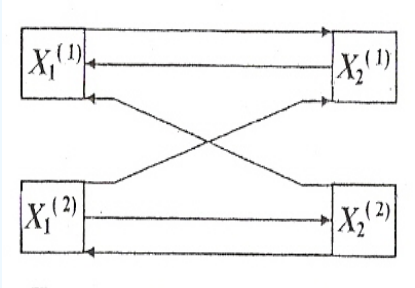
---

(1) Προς τούτο, υπολογίζουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του πίνακα Θ, δηλαδή τις ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{M_1+M_2}$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(\Theta - \lambda\, \mathrm{I})$, και ακολούθως για κάθε μία από αυτές τις ιδιοτιμές λ_k υπολογίζουμε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $q^{(k)}$ του Θ κατόπιν επίλυσης της διανυσματικής *Εξίσωσης* $q^{(k)\,T} \Theta = \lambda\, q^{(k)T}$.

VIII.1. Παρατήρηση. Αξίζει να σημειωθεί ότι η *Διαφορική Εξίσωση* (42) μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα Σύστημα ***Συζευγμένων Εξισώσεων*** (: Coupled Equations). Σύνολα Μαχών που περιγράφονται από *Μη Συζευγμένες Εξισώσεις* δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτά κατά την ανάλυση που θα ακολουθήσει λόγω της πλήρους ανεξαρτησίας των διαφόρων συνόλων Εξισώσεων που αναπαριστούν μη σχετικές (: *μη συζευγμένες*) Μάχες που διεξάγονται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά. Παραδείγματα Μη Συζευγμένων καθώς και Συζευγμένων Συνόλων Μαχών δίνονται στο επόμενο *Σχήμα 1*, όπου τα βέλη υποδεικνύουν τον προορισμό των πυρών:



Μη Συζευγμένο Σύνολο Μαχών



Συζευγμένο Σύνολο Μαχών

Σχήμα 1. *Παραδείγματα Μη Συζευγμένων και Συζευγμένων Συνόλων Μαχών*

Για κάθε ένα από τα συγκεκριμένα ανωτέρω δύο *Παραδείγματα* του *Σχήματος 1*, ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας (δηλαδή, ο Ολικός Ρυθμός

Φθερσεπιβολής) των δύο Δυνάμεων είναι ένας 2×2 πίνακας Θ που έχει την ακόλουθη αντίστοιχη μορφή:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\ldots) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\ldots) \\ -(\ldots) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\ldots) & 0 & 0 \end{pmatrix} : \textit{Μη Συζευγμένο Σύνολο Μαχών} \qquad (47a)$$

και

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\ldots) & -(\ldots) \\ 0 & 0 & 0 & -(\ldots) \\ -(\ldots) & -(\ldots) & 0 & 0 \\ 0 & -(\ldots) & 0 & 0 \end{pmatrix} : \textit{Συζευγμένο Σύνολο Μαχών} \qquad (47b).$$

Το σύμβολο $-(\ldots)$ στους ανωτέρω δύο πίνακες αναπαριστά την ύπαρξη μη μηδενικού Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας (: Ρυθμού Φθερσεπιβολής) κάποιας Δύναμης εναντίον της αντίπαλής της.

Ένα απλό κριτήριο αποφάνσεως περί του εάν ένας Συντελεστής Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας (δηλαδή, ένας Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής) Θ δύο αντιπάλων Δυνάμεων αναπαριστά ένα Μη Συζευγμένο Σύνολο Μαχών αποτελεί η δυνατότητα ισοδύναμης έκφρασης του πίνακα Θ σε έναν κατά υποπίνακες διαγώνιο πίνακα της μορφής:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & O & O & O \\ O & \Theta_2 & O & O \\ O & O & \ddots & O \\ O & O & O & \Theta_k \end{pmatrix} \text{ ή } \Theta = \begin{pmatrix} O & O & O & \Theta_1 \\ O & O & \Theta_2 & O \\ O & \iddots & O & O \\ \Theta_k & O & O & O \end{pmatrix},$$

όπου όλοι οι μηδενικοί υποπίνακες O είναι τετραγωνικοί και οι υποπίνακες Θ_v είναι διαγώνιοι. Η ισοδύναμη αυτή έκφραση μπορεί να προκύψει κατόπιν απλών πινακικών πράξεων, όπως είναι η αναδιάταξη γραμμών και στηλών του πίνακα Θ. ■

Αντικαθιστώντας τώρα τις *Εξισώσεις* (44) και (46) μέσα στην *Εξίσωση* (45), λαμβάνουμε την

$$\begin{pmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_1^{\,T} \\ -\Theta_2^{\,T} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 V_1 \\ c_2 V_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 V_1 \\ c_2 V_2 \end{pmatrix} \qquad (48)$$

από την οποία προκύπτει αμέσως το σύστημα *Εξισώσεων*:

$$-\Theta_1^{\,T} c_2 V_2 = \lambda c_1 V_1 \qquad (49)$$

$$-\Theta_2^{\,T} c_1 V_1 = \lambda c_2 V_2 . \qquad (50)$$

Πολλαπλασιάζοντας ακολούθως την *Εξίσωση* (49) επί $\Theta_2^{\,T}$ και την (50) επί λ, βρίσκουμε

$$-\Theta_2^{\,T}\Theta_1^{\,T} c_2 V_2 = \lambda \Theta_2^{\,T} c_1 V_1 \text{ και } -\Theta_2^{\,T} \lambda c_1 V_1 = \lambda^2 c_2 V_2 ,$$

απ' όπου έπεται η σχέση

$$\left(\Theta_2^{\,T} \Theta_1^{\,T} - \lambda^2 \mathrm{I}\right) c_1 V_1 = 0 . \qquad (51)$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την *Εξίσωση* (50) επί $\Theta_1^{\,T}$ και την (49) επί λ, έχουμε

$$-\Theta_1^{\,T} \Theta_2^{\,T} c_1 V_1 = \lambda \Theta_1^{\,T} c_2 V_2 \text{ και } -\Theta_1^{\,T} \lambda c_2 V_2 = \lambda^2 c_1 V_1 ,$$

απ' όπου έπεται η σχέση

$$\left(\Theta_1^{\,T} \Theta_2^{\,T} - \lambda^2 \mathrm{I}\right) c_2 V_2 = 0 . \qquad (52)$$

Καθώς ο πίνακας Θ_1 είναι ένας $(M_2 \times M_1)-$πίνακας, ενώ ο πίνακας Θ_2 είναι ένας $(M_1 \times M_2)-$πίνακας, ο συνολικός αριθμός των ιδιοτιμών για τις *Εξισώσεις* (51) και (52), δηλαδή για τους πίνακες των *Εξισώσεων* αυτών, είναι $M_1 + M_2$. Παρατηρούμε λοιπόν πως ***εάν*** $M_2 > M_1$***, τότε υπάρχουν*** M_1 ***κοινές ιδιοτιμές***

$$\mu = \lambda^2$$

για τις Εξισώσεις (51) ***και*** (52)***, ενώ οι υπόλοιπες*** $M_2 - M_1$ ***ιδιοτιμές της Εξίσωσης*** (51) ***θα είναι οπωσδήποτε ίσες προς το*** 0 ***:***

$$\mu = 0 .^{(1)}$$

Τα ιδιοδιανύσματα V_1 που αντιστοιχούν στις $M_2 - M_1$ μηδενικές αυτές ιδιοτιμές προκύπτουν από την επίλυση της διανυσματικής *Εξίσωσης*

$$\Theta_1^{\ T}\,\Theta_2^{\ T}\,c_1 V_1 = 0\,. \qquad (53)$$

Τα γινόμενα $\Theta_1^{\ T}\,\Theta_2^{\ T}$ και $\Theta_2^{\ T}\,\Theta_1^{\ T}$ στις *Εξισώσεις* (51) και (52) αναπαριστούν μη αρνητικούς πίνακες, επειδή όλα τα στοιχεία τους

$$\theta_1^{(i\to j)} = \theta_1^{(i\to j)}\left(t,x,y,z,X_1,X_2\right) \text{ και } \theta_2^{(j\to i)} = \theta_2^{(j\to i)}\left(t,x,y,z,X_1,X_2\right)$$

είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Επομένως, από το *Θεώρημα Perron-Frobenius* (βλέπε [Δάρας, 2008], *Θεώρημα ΙΙΙ.4.1.4* της σελίδας 230), έπεται ότι οι *Εξισώσεις* (51) και (52) έχουν μία κοινή πραγματική μη αρνητική ιδιοτιμή

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 := \lambda^{\ 2}$$

η οποία είναι ίση ή μεγαλύτερη από τα μέτρα όλων των άλλων ιδιοτιμών και της οποίας τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\tilde{V}_1$ για την *Εξίσωση* (51) και $\tilde{V}_2$ για την *Εξίσωση* (52) έχουν παντού μη αρνητικές συνιστώσες. Επειδή οποιαδήποτε αριθμητικά πολλαπλάσια $c_1\tilde{V}_1$ και $c_2\tilde{V}_2$ των διανυσμάτων $\tilde{V}_1$ και $\tilde{V}_2$ είναι υποπίνακες-στήλες ενός ιδιοδιανύσματος του πίνακα Θ, έπεται αμέσως, από την *Εξίσωση* (46), ότι το (Εξ Αριστερών Κυρίαρχο) Ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ του μη αρνητικού πίνακα που ορίζει ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας (δηλαδή, ο Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής) Θ των δύο Δυνάμεων πρέπει να είναι της μορφής:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1\tilde{V}_1 \\ c_2\tilde{V}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\,M_1 \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \\ \}\,M_2 \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \end{matrix}\,. \qquad (54)$$

---

(1) Πράγματι, σε διαφορετική περίπτωση, εάν δηλαδή οι M_2-M_1 υπόλοιπες αυτές ιδιοτιμές δεν ήταν όλες ίσες προς το μηδέν, τότε, εκτός από τις $2M_1$ (ενδεχομένως μιγαδικές) ιδιοτιμές $\lambda=\pm\mu^{1/2}$, θα υπήρχαν επί πλέον άλλες $2(M_2-M_1)$ ιδιοτιμές όχι όλες ίσες προς το μηδέν. Αυτό όμως θα συνεπαγόταν ότι ο συνολικός αριθμός ιδιοτιμών για τις δύο *Εξισώσεις* (51) και (52) θα ήταν ίσος με $2M_1+2(M_2-M_1)=2M_2$, δηλαδή θα ήταν μεγαλύτερος του συνολικού αριθμού M_1+M_2 των ιδιοτιμών των *Εξισώσεων* (51) και (52), πράγμα που είναι άτοπο.

VIII.7. Παρατήρηση. Η επιλογή των αριθμητικών σταθερών c_1 και c_2 δεν πρέπει να είναι αυθαίρετη. Πράγματι, αναστρέφοντας τις *Εξισώσεις* (49) και (50), και θέτοντας $\widetilde{V}_1$ στην θέση του V_1 και $\widetilde{V}_2$ στην θέση του V_2, λαμβάνουμε:

$$-c_2\,\widetilde{V}_2^{\,T}\,\Theta_1 = \widetilde{\lambda}\,c_1\,\widetilde{V}_1^{\,T} \qquad (55)$$

$$-c_1\,\widetilde{V}_1^{\,T}\,\Theta_2 = \widetilde{\lambda}\,c_2\,\widetilde{V}_2^{\,T} \qquad (56)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη από τις δύο αυτές *Σχέσεις* με το διάνυσμα:

$$\Im_{M_1} := \left.\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}\ M_1 \text{ γραμμές} \qquad (57a)$$

την δεύτερη από τις δύο αυτές *Σχέσεις* με το διάνυσμα:

$$\Im_{M_2} := \left.\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}\ M_2 \text{ γραμμές,} \qquad (57b)$$

και τότε απαλείφοντας το $\widetilde{\lambda}$ και από τις δύο, οδηγούμαστε στην ακόλουθη *Σχέση* μεταξύ των αριθμητικών σταθερών c_1 και c_2:

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \frac{\widetilde{V}_1^{\,T}\Theta_2\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_2^{\,T}\Theta_1\,\Im_{M_1}}\,\frac{\widetilde{V}_1^{\,T}\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_2^{\,T}\Im_{M_2}}. \qquad (58)$$

Προφανώς, η *Σχέση* αυτή μπορεί να γραφεί ισοδυνάμως και ως εξής:

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = -\left(\frac{\widetilde{V}_1^{\,T}\Theta_2\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_2^{\,T}\Theta_1\Im_{M_1}}\,\frac{\widetilde{V}_1^{\,T}\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_2^{\,T}\Im_{M_2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (59)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην τελευταία *Εξίσωση* (59) δικαιολογείται από την απαίτηση της ικανοποίησης των παραπάνω *Εξισώσεων* (55) και (56) στις οποίες όλοι οι πίνακες Θ_1, Θ_2, $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$ έχουν μόνον μη αρνητικά στοιχεία και η ιδιοτιμή $\widetilde{\lambda}$ είναι επίσης θετική. ■

VIII.8. Αριθμητικός Υπολογισμός των εξ αριστερών κυρίαρχων ιδιοδιανυσμάτων και των αντιστοίχων ιδιοτιμών τους. Ο πίνακας Θ^T, εκτός από την πραγματική μη αρνητική ιδιοτιμή

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 := \lambda^2,$$

η οποία είναι ίση ή μεγαλύτερη από τα μέτρα (: τις απόλυτες τιμές) όλων των άλλων ιδιοτιμών, έχει και την αντίθετη ιδιοτιμή

$$-\tilde{\lambda} = -\lambda_1 = -\lambda^2$$

της οποίας το μέτρο είναι προφανώς ίσο με αυτό της $\tilde{\lambda} = \lambda_1$. Επειδή λοιπόν υπάρχουν δύο ιδιοτιμές του πίνακα Θ με μέγιστα μέτρα, είναι κατ' αρχή αδύνατη η ευθεία εφαρμογή της κλασικής Αριθμητικής Μεθόδου των Δυνάμεων για τον υπολογισμό της ιδιοτιμής $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ και του αντιστοίχου ιδιοδιανύσματός της $\tilde{q} = q^{(1)}$ (βλέπε [Δάρας, 2008], *Κεφάλαιο ΙΙ* του *1ου Τόμου*). Θα πρέπει λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε κάποια διαφορετική Αριθμητική Μέθοδο υπολογισμού. Ωστόσο, επειδή οι άλλες γνωστές Αριθμητικές Μέθοδοι ενδέχεται να οδηγήσουν σε ασύμφορα αποτελέσματα, θα προτιμήσουμε στη συνέχεια να διασκευάσουμε αρκούντως την διατύπωση των μεγεθών έτσι ώστε να διαμορφωθούν κατάλληλες προϋποθέσεις εφαρμογής της κλασικής Αριθμητικής Μεθόδου των Δυνάμεων.

Προς τούτο, ξεκινώντας από τον ορισμό ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος για την περίπτωση της ιδιοτιμής $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ και του αντιστοίχου ιδιοδιανύσματός της $\tilde{q} = q^{(1)}$, έχουμε:

$$\left(\Theta^T - \tilde{\lambda}\,\mathrm{I}\right)\tilde{q}\ \left(= \left(\Theta^T - \lambda_1\,\mathrm{I}\right)q^{(1)}\right) = 0,$$

οπότε προσθέτοντας σε αμφότερα τα μέρη της τελευταίας μία ποσότητα της μορφής

$$\mu\,\mathrm{I}\,\tilde{q}\ \left(= \mu\,\mathrm{I}\,q^{(1)}\right),$$

όπου μ είναι μία αυθαίρετα επιλεγμένη μη μηδενική πραγματική σταθερά, λαμβάνουμε την *Εξίσωση*:

$$\left(\Theta^T + \mu \mathrm{I}\right)\tilde{q} = \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\tilde{q} \ (\Leftrightarrow \left(\Theta^T + \mu \mathrm{I}\right)q^{(1)} = \left(\lambda_1 + \mu\right)q^{(1)}).$$

Με άλλα λόγια, καταλήγουμε στην *Σχέση*:

$$\overline{\Theta}^T \ \tilde{q} = \overline{\lambda}\,\tilde{q} \ (\Leftrightarrow \overline{\Theta}^T \ q^{(1)} = \overline{\lambda}\,q^{(1)}), \qquad (60)$$

στην οποία χρησιμοποιήθηκαν οι εξής δύο συμβολισμοί:

$$\overline{\Theta}^T := \Theta^T + \mu\,\mathrm{I} \text{ και } \overline{\lambda} = \tilde{\lambda} + \mu (= \lambda_1 + \mu). \qquad (61)$$

Με αυτόν τον τρόπο, διασκευάσαμε αρκούντως την διατύπωση του προβλήματος, έτσι ώστε

- η πρώτη, κατ' απόλυτη τιμή, μέγιστη ιδιοτιμή $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ του πίνακα Θ να αντιστοιχεί στην μοναδική μέγιστη ιδιοτιμή $\overline{\lambda}_1 = \tilde{\lambda} + \mu (= \lambda_1 + \mu)$ του πίνακα $\overline{\Theta}$, ενώ
- η δεύτερη, κατ' απόλυτη τιμή, μέγιστη ιδιοτιμή $-\tilde{\lambda} = -\lambda_1$ του πίνακα Θ να αντιστοιχεί στην (μικρότερη κατ' απόλυτη τιμή) ιδιοτιμή $\overline{\lambda}_2 = -\tilde{\lambda} + \mu \quad (= -\lambda_1 + \mu)$ του πίνακα $\overline{\Theta}$.

Αυτό σημαίνει ότι η κλασική Αριθμητική Μέθοδος των Δυνάμεων μπορεί να εφαρμοσθεί ευθέως για τον υπολογισμό της μοναδικής μέγιστης ιδιοτιμής

$$\overline{\lambda}_1$$

του πίνακα $\overline{\Theta}$ της *Σχέσης* (60), καθώς και του αλληλένδετου προς αυτήν εξ αριστερών κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος

$$\overline{q}^{(1)}.$$

Κατόπιν τούτου, η κατ' απόλυτη τιμή, μέγιστη ιδιοτιμή $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ του πίνακα Θ προσδιορίζεται άμεσα από τον *Τύπο*:

$$\tilde{\lambda} = \overline{\lambda}_1 - \mu, \qquad (62)$$

ενώ το αντίστοιχο εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ προκύπτει από την *Σχέση* (60) εφόσον αντικαταστήσουμε μέσα σ' αυτήν τον *Τύπο* (62). ■

Κατωτέρω, ας δώσουμε κάποια στοιχειώδη παραδείγματα εξ αριστερών κυρίαρχων ιδιοδιανυσμάτων $\widetilde{q} = q^{(1)}$ του πίνακα Θ σε ορισμένες απλές και ενδεικτικές περιπτώσεις.

VIII.9. Παραδείγματα εξ αριστερών κυρίαρχων ιδιοδιανυσμάτων. Ας υποθέσουμε ότι ο Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής των δύο Δυνάμεων, ήτοι ο μη αρνητικός $(M_1 + M_2) \times (M_1 + M_2)$ πίνακας

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix}$$

αποτελείται μόνον από σταθερά στοιχεία.

Οι πρώτες επτά περιπτώσεις αναφέρονται σε καταστάσεις Μαχών κατά τις οποίες οι αλγεβρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών λ του πίνακα Θ υπερβαίνουν τις αντίστοιχες γεωμετρικές πολλαπλότητες (βλέπε σελίδα 260 του παρόντος).

1) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -b \\ -a & \mathrm{O} \end{bmatrix}.$$

Τότε οι δύο ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{a\,b}, -\sqrt{a\,b}$$

και το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\widetilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με δύο γραμμές:

$$\widetilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{b/a} \end{pmatrix}.$$

2) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & -b \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε οι τρεις ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{2ab},\ 0, -\sqrt{2ab}$$

και το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με τρεις γραμμές:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2b/a} \end{pmatrix}.$$

3) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b \\ -a & -a & \dots & -a & 0 \end{bmatrix} : (m+1)\times(m+1) \text{ πίνακας.}$$

Τότε οι $(m+1)$ ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{mab},\ \underbrace{0,\ldots\ldots,0,\ldots\ldots,0}_{(m-1)\Phi\mathrm{OPE\Sigma}}, -\sqrt{mab}$$

ενώ το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με $(m+1)$ γραμμές:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\sqrt{mb/a} \end{pmatrix}.$$

4) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & -b \\ 0 & 0 & -b & -b \\ -a & -a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε οι τέσσερις ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = 2\sqrt{a\,b},\ \ 0, 0, -2\sqrt{a\,b}$$

και το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με τέσσερις γραμμές:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{b/a} \\ -\sqrt{b/a} \end{pmatrix}.$$

5) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b & -b \\ -a & -a & -a & 0 & 0 \\ -a & -a & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε οι πέντε ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{6ab},\ \ 0,0,0,-\sqrt{6ab}$$

και το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με πέντε γραμμές:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{3b/2a} \\ -\sqrt{3b/2a} \end{pmatrix}.$$

6) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b & -b & -b \\ -a & -a & -a & 0 & 0 & 0 \\ -a & -a & -a & 0 & 0 & 0 \\ -a & -a & -a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε οι έξι ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = 3\sqrt{ab},\ \ 0,0,0,0,-3\sqrt{ab}$$

και το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με έξι γραμμές:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{b/a} \\ -\sqrt{b/a} \\ -\sqrt{b/a} \end{pmatrix}.$$

7) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & 0 & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -b & \cdots & -b \\ -a & -a & -a & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a & \cdots & -a & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right\} m \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array}}\right\} n \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{m \text{ ΣΤΗΛΕΣ}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ ΣΤΗΛΕΣ}} \end{array}.$$

Τότε οι $(m+n)$ ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{mnab},\ \underbrace{0,\ldots\ldots\ldots,0,\ldots\ldots\ldots,0}_{(m+n-2)\text{ ΦΟΡΕΣ}} - \sqrt{mnab}$$

και το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με $(m+n)$ γραμμές:

$$\widetilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\sqrt{mb/na} \\ \vdots \\ -\sqrt{mb/na} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \text{ ΓΡΑΜΜΕΣ} \end{matrix} .$$

Οι επόμενες δύο και τελευταίες περιπτώσεις αναφέρονται σε καταστάσεις Μαχών κατά τις οποίες οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών λ του πίνακα Θ ισούνται μεταξύ τους, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (βλέπε σελίδα 260 του παρόντος).

8) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Τότε οι τέσσερις ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{a\,b}, \sqrt{ab}, -\sqrt{a\,b}, -\sqrt{ab}$$

ενώ το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\widetilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με τέσσερις γραμμές:

$$\widetilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\sqrt{b/a} \end{pmatrix} .$$

9) Η Περίπτωση κατά την οποία

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε οι έξι ιδιοτιμές του Θ είναι οι αριθμοί

$$\lambda = \sqrt{a\,b}, \sqrt{ab}, 0, 0, -\sqrt{a\,b}, -\sqrt{ab}$$

ενώ το εξ αριστερών κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ θα είναι ο πίνακας-στήλη με έξι γραμμές:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{b/a} \end{pmatrix}. \square$$

Ας επανέλθουμε τώρα στο κεντρικό πρόβλημα του *Εδαφίου 8.3*, δηλαδή στην διερεύνηση της δυνατότητας ύπαρξης και καθορισμού μίας χαρακτηριστικής αριθμητικής παραμέτρου, αναλόγως προς τις τιμές της οποίας θα μπορούσε κανείς να δώσει αμέσως μία αρχική εκτίμηση για τον τελικό Νικητή μίας Μάχης παρακάμπτοντας τελείως την διαδικασία επίλυσης της ανωτέρω *Εξίσωσης* (42).

Από την *Σχέση* (36) έπεται ότι τα εξ αριστερών γενικευμένα ιδιοδιανύματα $q^{(i)}$ είναι ορθογώνια προς τα εκ δεξιών γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $p^{(j)}$. Αυτή η ιδιότητα ορθογωνιότητας εκφράζεται ως:

$$q^{(i)\,T} p^{(j)} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ i = j \\ 0, & \alpha\nu\ i \neq j \end{cases} \qquad (63)$$

και θα χρησιμοποιηθεί αμέσως παρακάτω προκειμένου να προσδιορισθεί η ζητούμενη αριθμητική παράμετρος η οποία θα αποδίδει το μέτρο της υπεροχής στην Μάχη κατά την έναρξη της Μάχης.

Η παράμετρος αυτή θα προκύπτει από την λύση της *Εξίσωσης* (42) μετά από τον πολλαπλασιασμό

$$\tilde{q}^{T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} = q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} \qquad (63)$$

κατά την χρονική στιγμή $t=0$, του διανύσματος X με το (εξ αριστερών κυρίαρχο) ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ του μη αρνητικού πίνακα που ορίζει ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας (δηλαδή, ο Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής) Θ των δύο Δυνάμεων. Επειδή, σύμφωνα με τον *Τύπο* (32), έχουμε

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\left[\exp(\lambda t)\,D\right] Q^{T}\,\mathrm{X}^{0}, \qquad (64)$$

συνδυασμός των *Σχέσεων* (63), (64) δίνει:

$$q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} = q^{(1)^T}\,\mathrm{P}\left[\exp(\lambda t)D\right]Q^{T}\,\mathrm{X}^{0}\Big|_{t=0}. \qquad (65)$$

Γράφοντας τώρα τον πίνακα P των εκ δεξιών γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα Θ υπό την αναλυτική μορφή:

$$\mathrm{P} = \left(p^{(1)} \;\; p^{(2)} \ldots\ldots\right)$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (63), η *Εξίσωση* (65) γίνεται:

$$\begin{aligned}
q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} &= q^{(1)^T}\left(p^{(1)} \quad p^{(2)} \quad \ldots \quad \ldots\right)\left[\exp(\lambda\, t)D\right]Q^T\,\mathrm{X}^0\Big|_{t=0} \\
&= \left(1 \quad 0 \quad \ldots \quad \ldots\right) \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1\, t)D^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \exp(\lambda_2\, t)D^{(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \exp\left(\lambda_3\, D^{(3)}\right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{(1)^T} \\ q^{(2)^T} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \mathrm{X}^0\Bigg|_{t=0} \\
&= \left(\exp(\lambda_1\, t)\;\mathrm{I} \quad 0 \quad \ldots \quad \ldots\right) \begin{bmatrix} q^{(1)^T} \\ q^{2^T} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \mathrm{X}^0\Bigg|_{t=0} \\
&= q^{(1)^T}\exp(\lambda_1\, t)\mathrm{X}^0\Big|_{t=0},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} = q^{(1)^T}\,\mathrm{X}^0. \qquad (66)$$

Παρατηρώντας τώρα ότι $\mathrm{X}^0 = \left(X_1^0 \quad X_2^0\right)^T = \left(X_1(0) \;\; X_2(0)\right)^T$ και αντικαθιστώντας την έκφραση (54) μέσα στον *Τύπο* (66), συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} &= \left(c_1\widetilde{V}_1^T \;\; c_2\,\widetilde{V}_2^T\right)\begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{pmatrix} \\
&= c_1\left(\widetilde{V}_1^T X_1(0) + \frac{c_2}{c_1}\widetilde{V}_2^T\, X_2(0)\right)
\end{aligned}$$

ή λόγω, των *Σχέσεων* (59) και (66),

$$q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} = q^{(1)^T}\,\mathrm{X}^0$$

$$= c_1\left(\widetilde{V}_1^T X_1(0) - \left(\frac{\widetilde{V}_1^T\,\Theta_2\,\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_2^T\,\Theta_1\,\Im_{M_1}}\,\frac{\widetilde{V}_1^T\,\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_2^T\,\Im_{M_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}_2^T\,X_2(0)\right), \quad (67)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι συμβολισμοί $(57a)$ και $(57b)$:

$$\Im_{M_1} := \left.\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}\ M_1 \text{ γραμμές και } \Im_{M_2} := \left.\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}\ M_2 \text{ γραμμές.}$$

Χωρίς απώλεια της ακρίβειας των υπολογισμών, μπορούμε να θέσουμε

$$c_1 = 1,$$

οπότε η ανωτέρω τελευταία *Σχέση* γίνεται

$$q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} = q^{(1)^T}\,\mathrm{X}^0$$

$$= \widetilde{V}_1^T X_1(0) - \left(\frac{\widetilde{V}_1^T\,\Theta_2\,\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_2^T\,\Theta_1\,\Im_{M_1}}\,\frac{\widetilde{V}_1^T\,\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_2^T\,\Im_{M_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}_2^T X_2(0). \quad (68)$$

Η *Εξίσωση* (68) συνεπάγεται ότι η αριθμητική ποσότητα

$$q^{(1)^T}\,\mathrm{X}\Big|_{t=0} = q^{(1)^T}\,\mathrm{X}^0, \quad (69)$$

που σχηματίζεται από την κυριαρχούσα των βασικών λύσεων της (42), αναπαριστά την διαφορά μεταξύ των Συναθροίσεων των Δυνάμεων 1 και 2. Ένεκα τούτου, η εν λόγω ποσότητα μπορεί να εκλαμβάνεται ως ένα ***Μέτρο Αξίας*** (:Measure of Merit) για τις αντιπαρατιθέμενες Δυνάμεις.

Εφόσον κριθεί ότι είναι πρακτικά χρήσιμο, μπορούμε να περιστείλουμε την τιμή της ποσότητας (69). Προς τούτο, η *Εξίσωση* (68) μπορεί να κανονικοποιηθεί ως προς το μέγεθος $\widetilde{V}_1^T X_1(0)$ αποδίδουσα

- μία αντικειμενική αριθμητική ***Παράμετρο Υπεροχής*** S (: Superiority Parameter) ***για κάθε χρονική στιγμή*** t ***από την Έναρξη της Μάχης***

$$S = S(t) := \frac{q^{(1)}\,\mathrm{X}(t)}{c_1\,\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)} \qquad (70)$$

και

- μία αντικειμενική αριθμητική ***Παράμετρο Υπεροχής*** S_0 (: Superiority Parameter) ***κατά την Έναρξη της Μάχης***

$$S_0 := \frac{q^{(1)}\,\mathrm{X}(0)}{c_1\,\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)} = 1 - \left(\frac{\widetilde{V}_1^T\,\Theta_2\,\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_2^T\,\Theta_1\,\Im_{M_1}}\,\frac{\widetilde{V}_1^T\,\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_2^T\,\Im_{M_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\widetilde{V}_2^T\,X_2(0)}{\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)} = 1 - \Phi_0^{-1}, \qquad (71)$$

όπου

$$\Phi_0 := \left(\frac{\widetilde{V}_2^T\Theta_1\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_1^T\Theta_2\Im_{M_2}}\,\frac{\widetilde{V}_2^T\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_1^T\Im_{M_1}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)}{\widetilde{V}_2^T\,X_2(0)}. \qquad (72)$$

VIII.10. Παρατήρηση. Η Παράμετρος Υπεροχής S είναι μία ποσότητα που αναπαριστά ένα μέτρο για την εκτίμηση της όλης επίδρασης που μπορεί να έχει, κάθε χρονική στιγμή, η κυριαρχούσα βασική λύση επί της λύσης της (42). Από την άλλη πλευρά, η Παράμετρος Υπεροχής Φ_0 ορίζεται σχηματιζόμενη από ένα γινόμενο δύο συνιστωσών η πρώτη από τις οποίες αναπαριστά τον <<ποιοτικό>> λόγο

$$\left(\frac{\widetilde{V}_2^T\Theta_1\Im_{M_1}}{\widetilde{V}_1^T\Theta_2\Im_{M_2}}\,\frac{\widetilde{V}_2^T\Im_{M_2}}{\widetilde{V}_1^T\Im_{M_1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ενώ η δεύτερη τον <<ποσοτικό>> λόγο

$$\frac{\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)}{\widetilde{V}_2^T\,X_2(0)}. \blacksquare$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$-\infty < S_0 < 0 \text{ όταν } 0 < \Phi_0 < 1 \qquad (73a)$$

$$S_0 = 0 \text{ όταν } \Phi_0 = 1 \qquad (73b)$$

$$0 < S_0 < 1 \text{ όταν } 1 < \Phi_0 < \infty . \qquad (73c)$$

Ιδιαιτέρως, οι παράμετροι

$$q^{(1)^T} \mathrm{X}^0 \text{ και } S_0$$

μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ***Μέτρα Αποτελεσματικότητας*** (:Measure of Effectiveness) για τον απ' ευθείας προσδιορισμό του αποτελέσματος μίας Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Στοχευμένα Πυρά χωρίς να προαπαιτείται η επίλυση του (Αιτιοκρατικού) Διαφορικού Συστήματος (42).

Έτσι, καταλήγουμε στο εξής βασικό συμπέρασμα:

VIII.11.Πρόταση.

Η Δύναμη 1 (προβλέπεται ότι) θα νικήσει εάν

$$\Phi_0 > 1 \text{ ή (ισοδύναμα εάν) } S_0 > 0,$$

ενώ

η Δύναμη 2 (προβλέπεται ότι) θα νικήσει εάν

$$\Phi_0 < 1 \text{ ή (ισοδύναμα εάν) } S_0 < 0.$$

Όταν

$$\Phi_0 = 1 \text{ ή (ισοδύναμα εάν) } S_0 = 0,$$

τότε (προβλέπεται ότι) αμφότερες οι δύο Δυνάμεις θα περιορίζουν αναλόγως τα Μεγέθη τους. ■

VIII.12. Παρατήρηση. Θα πρέπει ωστόσο να σημειωθεί πως η ανωτέρω πρόβλεψη περί Νίκης της μίας από τις δύο εμπλεκόμενες Δυνάμεις

- δηλώνει μόνον ποια από τις δύο Πλευρές θα υποστεί τις περισσότερες Απώλειες

και

- είναι βάσιμη μόνον υπό την προϋπόθεση ότι ***δ ε ν*** θα υπάρξουν παρεμβάσεις από μέρους των Δυνάμεων με σκοπό την μεταβολή της εξέλιξης των πραγμάτων.

Εάν όλες οι Οπλικές Μονάδες $X_i^{(j)} = X_i^{(j)}(t)$ ενός τύπου Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_i^{(j)}$ της Στρατιωτικής Δύναμης i $(i = 1,2$ και $j = 1,2,\ldots,M_i)$ αφανισθούν, τότε οι *Εξισώσεις* του *Διαφορικού Συστήματος* που περιγράφει την εξέλιξη της Μάχης πρέπει να αναθεωρηθούν καταλλήλως και να διατυπωθούν ξανά σύμφωνα με τα νέα δεδομένα. Η αναθεώρηση αυτή επισύρει και νέους υπολογισμούς για τις τιμές των Παραμέτρων Υπεροχής S και S_0, οι οποίες θα αφορούν πλέον το υπόλοιπο μέρος της Μάχης. ■

8.4.Αναγωγή του Προβλήματος στην Επίλυση Εξισώσεων με Συναθροίσεις Δυνάμεων

Από υπολογιστικής άποψης, τα (Αιτιοκρατικά) Μαθηματικά Μοντέλα (5) που περιγράφουν τις Μάχες μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων είναι αρκετά εκτενή και πρακτικώς δύσχρηστα. Έτσι, στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να μετατρέψουμε το *Διαφορικό Σύστημα* (1) σε ένα ισοδύναμο Διαφορικό Σύστημα ανάλογης διατύπωσης με αυτήν των Μαθηματικών Μοντέλων που εξετάσαμε στον 1ο Τόμο κατά την περιγραφή Μαχών μεταξύ ***Ομογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων.

Προς τούτο, πολλαπλασιάζουμε, κατ' αρχή, την πρώτη από τις *Εξισώσεις* (5) επί $c_1\widetilde{V}_1^T$ και την δεύτερη επί $c_2\widetilde{V}_2^T$ για να λάβουμε τις *Σχέσεις*:

$$c_1\widetilde{V}_1^T\dot{X}_1 = -c_1\widetilde{V}_1^T\Theta_2 X_2$$
$$c_2\widetilde{V}_2^T\dot{X}_2 = -c_2\widetilde{V}_2^T\Theta_1 X_1$$

Γράφοντας μάλιστα τα δεξιά μέρη των *Σχέσεων* αυτών υπό την μορφή:

$$-c_1\widetilde{V}_1^T\Theta_2 X_2 = \beta c_2 \widetilde{V}_2^T X_2 \qquad (74)$$

$$-c_2\widetilde{V}_2^T\Theta_1 X_1 = \alpha c_1 \widetilde{V}_1^T X_1 \qquad (75)$$

οδηγούμαστε στις *Εξισώσεις*:

$$c_1\widetilde{V}_1^T \dot{X}_1 = \beta c_2 \widetilde{V}_2^T X_2 \qquad (76)$$

$$c_2\widetilde{V}_2^T \dot{X}_2 = \alpha c_1 \widetilde{V}_1^T X_1 \qquad (77)$$

στις οποίες τα δεξιά μέρη $\beta c_2 \widetilde{V}_2^T X_2$ και $\alpha c_1 \widetilde{V}_1^T X_1$ τελούν προς προσδιορισμό για κάποιες κατάλληλα επιλεγμένες τιμές των θετικών σταθερών α και β.

Ακολούθως, παρατηρούμε ότι, σύμφωνα προς τα αναφερθέντα στο *Εδάφιο 8.2* (και συγκεκριμένα στις *Σχέσεις* (40) και (41) του *Εδαφίου* αυτού), τα Μεγέθη $\Sigma_1 = \Sigma_1(t)$ και $\Sigma_2 = \Sigma_2(t)$ των Συναθροίσεων Δυνάμεων για τις δύο αντίπαλες Πλευρές μπορούν να γραφούν υπό την μορφή:

$$\Sigma_1 = \widetilde{V}_1^T X_1 = c_1\widetilde{W}_1^T X_1 \qquad (78)$$

και

$$\Sigma_2 = \widetilde{V}_2^T X_2 = c_2 \widetilde{W}_2^T X_2, \qquad (79)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους συμβολισμούς:

$$\widetilde{V}_1^T := c_1\widetilde{W}_1^T \qquad (80)$$

και

$$\widetilde{V}_2^T := c_2 \widetilde{W}_2^T. \qquad (81)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας τις *Εξισώσεις* (78) και (79) μέσα στις *Εξισώσεις* (76) και (77), καταλήγουμε στο εξής *Διαφορικό Σύστημα*:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_1 = -\beta \Sigma_2 & (82) \\ \dot{\Sigma}_2 = -\alpha \Sigma_1 & (83) \end{cases}$$

που είναι ακριβώς ανάλογης διατύπωσης με αυτήν των Μαθηματικών Μοντέλων που εξετάσαμε στον 1^{ο} Τόμο κατά την περιγραφή Μαχών μεταξύ ***Ομογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων.

VIII.13. Παρατήρηση. Ωστόσο, θα πρέπει οπωσδήποτε να επισημανθεί ότι οι Συναθροίσεις Δυνάμεων

$$\Sigma_1 = \Sigma_1(t) \text{ και } \Sigma_2 = \Sigma_2(t)$$

που προκύπτουν από την επίλυση των *Εξισώσεων* (82) και (83) θεωρούνται και είναι μόνον προσεγγίσεις των λύσεων του *Διαφορικού Συστήματος* (5), γιατί, εκ κατασκευής, δεν έχουν την δυνατότητα να ενσωματώσουν και να αποδώσουν στην έκφρασή τους οιαδήποτε κατάσταση ολοσχερούς αφανισμού ενός Τύπου j Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_i^{(j)}$ της Δύναμης i $(i = 1,2)$ από τα Πυρά της Δύναμης $3-i$ (δηλώνοντας συγχρόνως εάν ο αφανισμός αυτός επήλθε ανεξαρτήτως ή όχι από τους υπόλοιπους Τύπους Οπλικών Συστημάτων της Δύναμης i). ■

Απομένει να προσδιορίσουμε τις τιμές των σταθερών α και β. Προς τούτο, αναφέρουμε ότι, καθόσον τα μεγέθη $X_1 = X_1(t)$ και $X_2 = X_2(t)$ λαμβάνουν αυθαίρετες θετικές τιμές, οι *Σχέσεις* (74) και (75) μπορούν επίσης να γραφούν υπό την μορφή:

$$-c_1 \widetilde{V}_1^T \Theta_2 = \beta c_2 \widetilde{V}_2^T$$

και

$$-c_2 \widetilde{V}_2^T \Theta_1 = \alpha c_1 \widetilde{V}_1^T,$$

ή ακόμα, αναστρέφοντας τις τελευταίες, υπό την μορφή:

$$-\Theta_2^T c_1 \widetilde{V}_1 = \beta c_2 \widetilde{V}_2 \qquad (82)$$

και

$$-\Theta_1^T c_2 \widetilde{V}_2 = \alpha c_1 \widetilde{V}_1. \qquad (83)$$

Επιλύοντας το Σύστημα που προέκυψε, ως προς $\widetilde{V}_1$ και $\widetilde{V}_2$, λαμβάνουμε:

$$\Theta_1^T \Theta_2^T c_1 \widetilde{V}_1 = -\beta \Theta_1^T c_2 \widetilde{V}_2 = \beta \alpha c_1 \widetilde{V}_1$$
$$\Rightarrow \left(\Theta_1^T \Theta_2^T - \alpha \beta \mathrm{I}\right) c_1 \widetilde{V}_1 = 0 \qquad (84)$$

και

$$\Theta_2^T \Theta_1^T c_2 \widetilde{V}_2 = -\alpha \Theta_2^T c_1 \widetilde{V}_1 = \alpha \beta c_2 \widetilde{V}_2$$
$$\Rightarrow \left(\Theta_2^T \Theta_1^T - \alpha \beta \mathrm{I}\right) c_2 \widetilde{V}_2 = 0. \qquad (85)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις *Σχέσεις* (84) και (85) με τις ήδη αποδειχθείσες *Σχέσεις* (51) και (52) του *Εδαφίου 8.3*,παρατηρούμε αμέσως ότι:

$$\tilde{\lambda}^2 = \lambda_1^2 = \alpha\beta\,, \qquad (86)$$

όπου $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ αναπαριστά όπως συνήθως την μεγαλύτερη, κατ' απόλυτη τιμή, ιδιοτιμή του πίνακα

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix}.$$

Ομοίως, συγκρίνοντας τις *Σχέσεις* (82) και (83) με τις *Σχέσεις* (55) και (56) του *Εδαφίου 8.3*, βλέπουμε πως:

$$-\Theta_2^T c_1 \tilde{V}_1 = \beta c_2 \tilde{V}_2 \quad \text{και} \quad -c_1 \tilde{V}_1^T \Theta_2 = \tilde{\lambda} c_2 \tilde{V}_2^T$$

και

$$-\Theta_1^T c_2 \tilde{V}_2 = \alpha c_1 \tilde{V}_1 \quad \text{και} \quad -c_2 \tilde{V}_2^T \Theta_1 = \tilde{\lambda} c_1 \tilde{V}_1^T$$

και έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\alpha = \beta = \tilde{\lambda} = \lambda_1\,. \qquad (87)$$

Έτσι, συνοψίζοντας μπορούμε, με την επιφύλαξη της *Παρατήρησης VIII.13*, να διατυπώσουμε το εξής αποτέλεσμα (βλέπε [Anderson, 1979], [Holter, 1973] και [Przemieniecki, 2000]):

VIII.14.Πρόταση. ***Εάν*** $\Sigma_1 = \Sigma_1(t)$ ***και*** $\Sigma_2 = \Sigma_2(t)$ ***είναι τα Μεγέθη των Συναθροίσεων Δυνάμεων για τις δύο αντίπαλες Πλευρές κατά την χρονική στιγμή*** t***, τότε το Διαφορικό Σύστημα:***

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_1 = -\tilde{\lambda}\,\Sigma_2 & (88) \\ \dot{\Sigma}_2 = -\tilde{\lambda}\,\Sigma_1 & (89) \end{cases}$$

ισοδυναμεί με το Διαφορικό Σύστημα (5) ***και είναι ακριβώς ανάλογης διατύπωσης με αυτήν των Μαθηματικών Μοντέλων που περιγράφουν Μάχες μεταξύ Ομογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων.*** ■

8.5.Αριθμητικά Παραδείγματα σε διάφορες περιπτώσεις Μάχης <<Ενός Εναντίον Δύο>> με Στοχευμένα Πυρά

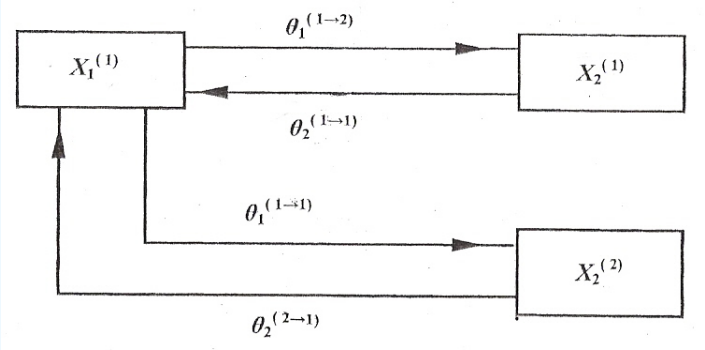
Στο παρόν *Εδάφιο*, θα εφαρμόσουμε την προτεινόμενη ανωτέρω Μέθοδο ανάλυσης Μάχης μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Στρατιωτικών Δυνάμεων στην περίπτωση ενός Αριθμητικού Παραδείγματος στο οποίο κατά την χρονική στιγμή t από την έναρξη της Μάχης

η Δύναμη 1 διαθέτει $X_1^{(1)}(t)$ Οπλικές Μονάδες ενός μόνον Τύπου Οπλικού Συστήματος $\text{ΟΣ}_1^{(1)}$ $(: M_1 = 1)$,

σε αντίθεση με

την Δύναμη 2 η οποία διαθέτει $X_2^{(1)}(t)$ και $X_2^{(2)}(t)$ Οπλικές Μονάδες δύο αντιστοίχων διαφορετικών Τύπων Οπλικών Συστημάτων $\text{ΟΣ}_2^{(1)}$ και $\text{ΟΣ}_2^{(2)}$ $(: M_2 = 2)$.

Η περίπτωση αυτή αποδίδεται σχηματικά ως εξής:



Σχήμα 2. *Παράδειγμα Μάχης <<Ενός Εναντίον Δύο>>*

Στο συγκεκριμένο Αριθμητικό Παράδειγμα, ο πίνακας Θ_1 δίνεται από την στήλη:

$$\Theta_1 = \left(\theta_1^{(i\to j)}\right)_{j,i} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(1\to 1)} \\ \theta_1^{(1\to 2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4/3) \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (90)$$

ενώ ο πίνακας Θ_2 δίνεται από την γραμμή:

$$\Theta_2 := \left(\theta_2^{(j\to i)}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \theta_2^{(1\to 1)} & \theta_2^{(2\to 1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/2) & 1 \end{pmatrix} \qquad (91)$$

Ως εκ τούτου, ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής των δύο Δυνάμεων, ήτοι ο μη αρνητικός $(M_1 + M_2)\times(M_1 + M_2) = 3\times 3$ πίνακας, θα είναι ο ακόλουθος:

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(3/2) & -1 \\ -(4/3) & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (92)$$

Όπως εύκολα μπορεί να επαληθευτεί, στο συγκεκριμένο Αριθμητικό Παράδειγμα, η, κατ' απόλυτη τιμή, μέγιστη ιδιοτιμή $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ του πίνακα Θ είναι ο αριθμός:

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 = 2 \qquad (93)$$

με αντίστοιχο Εξ Αριστερών Κυρίαρχο Ιδιοδιάνυσμα $\tilde{q} = q^{(1)}$ (για τον πίνακα Θ) το διάνυσμα:

$$\tilde{q} = q^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(3/4) \\ -(1/2) \end{pmatrix}. \qquad (94)$$

Περαιτέρω, θέτοντας

$$\lambda = \tilde{\lambda} = \lambda_1 = 2,\ V_1 = \tilde{V}_1 \text{ και } V_2 = \tilde{V}_2$$

στις *Σχέσεις* (51) και (52), λαμβάνουμε τις *Εξισώσεις*:

$$\left(\left(\Theta_2^{\,T}\,\Theta_1^{\,T}-\tilde{\lambda}^{\,2}\,\mathrm{I}\right)c_1\,\tilde{V}_1=0\Rightarrow\quad\right)\left(\Theta_2^{\,T}\,\Theta_1^{\,T}-4\,\mathrm{I}\right)c_1\,\tilde{V}_1=0$$

και

$$\left(\left(\Theta_1^{\,T}\,\Theta_2^{\,T}-\tilde{\lambda}^{\,2}\,\mathrm{I}\right)c_2\,\tilde{V}_2=0\Rightarrow\quad\right)\left(\Theta_1^{\,T}\,\Theta_2^{\,T}-4\,\mathrm{I}\right)c_2\,\tilde{V}_2=0$$

από τις οποίες έπεται ότι:

$$\tilde{V}_1=\left[1\right]\ \text{και}\ \tilde{V}_2=\left[1\quad(2/3)\right]^T \qquad (95)$$

Τέλος, κάνοντας χρήση της *Σχέσης* (72), βρίσκουμε:

$$\Phi_0=\frac{4}{3}\,\frac{X_1^{(1)}(0)}{X_2^{(1)}(0)+\left[2/3\right]X_2^{(2)}(0)}. \qquad (96)$$

Στα παρακάτω *Σχήματα 3α*, *3β* και *3γ*, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των εναπομενουσών Οπλικών Μονάδων $X_1^{(1)}(\tau)$, $X_2^{(1)}(\tau)$ και $X_2^{(2)}(\tau)$ συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου $\tau:=\tilde{\lambda}\,t\ (=\lambda_1\,t)$, σε τρεις περιπτώσεις:

1. στην περίπτωση κατά την οποία
$$X_1^{(1)}(0)=200,\ X_2^{(1)}(0)=100\ \text{και}\ X_2^{(2)}(0)=100$$
με αντίστοιχη τιμή της Παραμέτρου Υπεροχής Φ_0 ίση με 1.6,

2. στην περίπτωση κατά την οποία
$$X_1^{(1)}(0)=125,\ X_2^{(1)}(0)=100\ \text{και}\ X_2^{(2)}(0)=100$$
με αντίστοιχη τιμή της Παραμέτρου Υπεροχής Φ_0 ίση με 1.0,

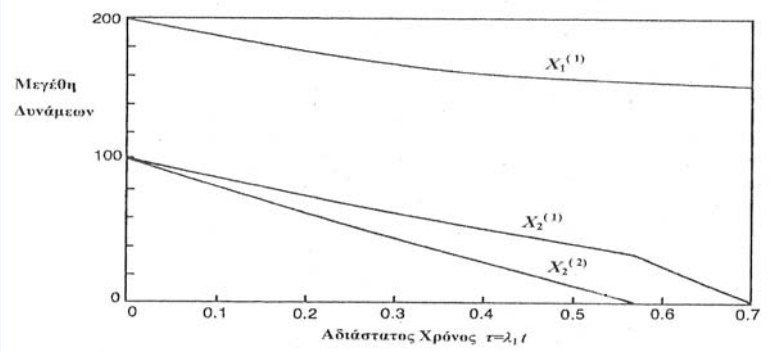
3. και τέλος, στην περίπτωση κατά την οποία
$$X_1^{(1)}(0)=100,\ X_2^{(1)}(0)=100\ \text{και}\ X_2^{(2)}(0)=100$$
με αντίστοιχη τιμή της Παραμέτρου Υπεροχής Φ_0 ίση με 0.8.

Οι λύσεις $X_1^{(1)}(\tau)$, $X_2^{(1)}(\tau)$ και $X_2^{(2)}(\tau)$ που παρουσιάζονται προσδιορίστηκαν με Αριθμητική Ολοκλήρωση του *Διαφορικού Συστήματος* (5), σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην *Παρατήρηση VIII.4*.

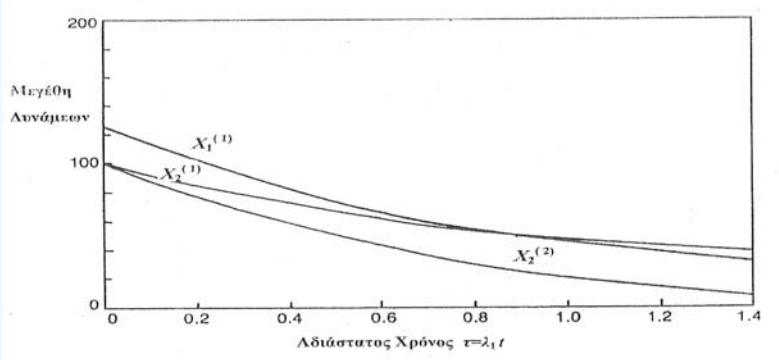
Όπως θα καταστεί εμφανές από το *Σχήμα 3α*, στην πρώτη περίπτωση (: $\Phi_0 = 1.6$), όταν $\tau = 0.57$ οι Οπλικές Μονάδες $X_2^{(2)}$ του 2ου Τύπου $\text{ΟΣ}_2^{(2)}$ Οπλικού Συστήματος της Δύναμης 2 πρόκειται να αφανισθούν ολοσχερώς. Ως εκ τούτου, κατά την χρονική στιγμή αυτή, όσες από τις Οπλικές Μονάδες $X_1^{(1)}(0.57)$ της Δύναμης 1 έχουν δεσμευθεί εναντίον των Οπλικών Μονάδων του 2ου Τύπου $\text{ΟΣ}_2^{(2)}$ Οπλικού Συστήματος της Δύναμης 2 θα πρέπει να αναθεωρήσουν τις δεσμεύσεις τους, δεσμευόμενες εκ νέου τούτη τη φορά εναντίον των εναπομενουσών Οπλικών Μονάδων $X_2^{(1)}(0.57)$ του 1ου Τύπου $\text{ΟΣ}_2^{(1)}$ Οπλικού Συστήματος της Δύναμης 2. Ως λογικό επακόλουθο της ούτως διαμορφωθείσας κατάστασης, είναι να προβλέπεται ταχύτερη ελάττωση του πλήθους $X_2^{(1)}(0.57)$ των εναπομενουσών Οπλικών Μονάδων του 1ου Τύπου $\text{ΟΣ}_2^{(1)}$ Οπλικού Συστήματος της Δύναμης 2. Μάλιστα, η πρόβλεψη αυτή ενισχύεται σημαντικά μετά από την χάραξη του *Σχήματος 4*, στο οποίο φαίνεται σαφώς ότι, όσο η Χρονική Διάρκεια της Μάχης μεγαλώνει, τόσο η Παράμετρος Υπεροχής S θα αυξάνεται περαιτέρω ταχέως. Να σημειωθεί πως η αρχική *θετική* τιμή S_0 της Παραμέτρου Υπεροχής S αποτελεί ήδη μία πρώτη ένδειξη της ανωτερότητας της Δύναμης 1.

Στο *Σχήμα 3β*, παρουσιάζεται η δεύτερη περίπτωση (: $\Phi_0 = 1.0$) στην οποία προβλέπεται ότι τα Μεγέθη των αντιπάλων Δυνάμεων θα μειώνονται βαθμιαίως κατά τέτοιον τρόπο ώστε καμία από τις δύο αυτές Δυνάμεις να μην μπορεί να αποκτήσει σαφές πλεονέκτημα εις βάρος της άλλης. Η πρόβλεψη αυτή ενισχύεται σημαντικά μετά από την χάραξη του *Σχήματος 4*, στο οποίο φαίνεται ότι η Παράμετρος Υπεροχής S ισούται με 0.

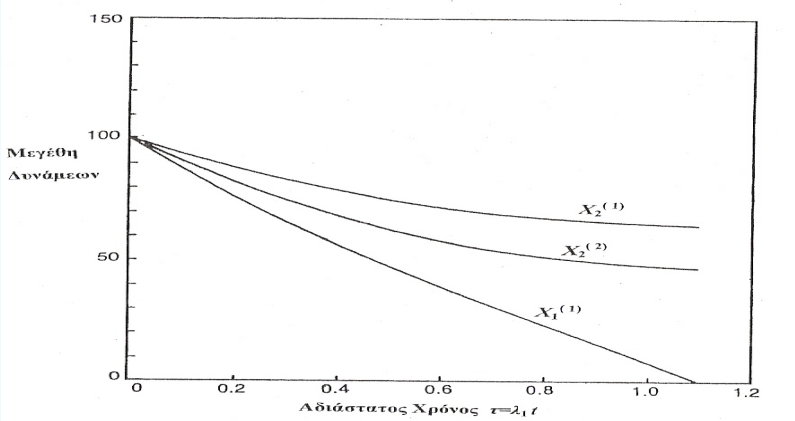
Τέλος, το *Σχήμα 3γ*, αναφέρεται στην τρίτη περίπτωση (: $\Phi_0 = 0.8$) στην οποία προβλέπεται η ταχεία μείωση του αριθμού $X_1^{(1)}$ των Οπλικών Μονάδων του μοναδικού Τύπου $\text{ΟΣ}_1^{(1)}$ Οπλικού Συστήματος της Δύναμης 1. Σημειώνεται πως η αρχική *αρνητική* τιμή S_0 της Παραμέτρου Υπεροχής S αποτελεί μία πρώτη ένδειξη της κατωτερότητας της Δύναμης 1.



Διάγραμμα 3α. *Η 1η περίπτωση*

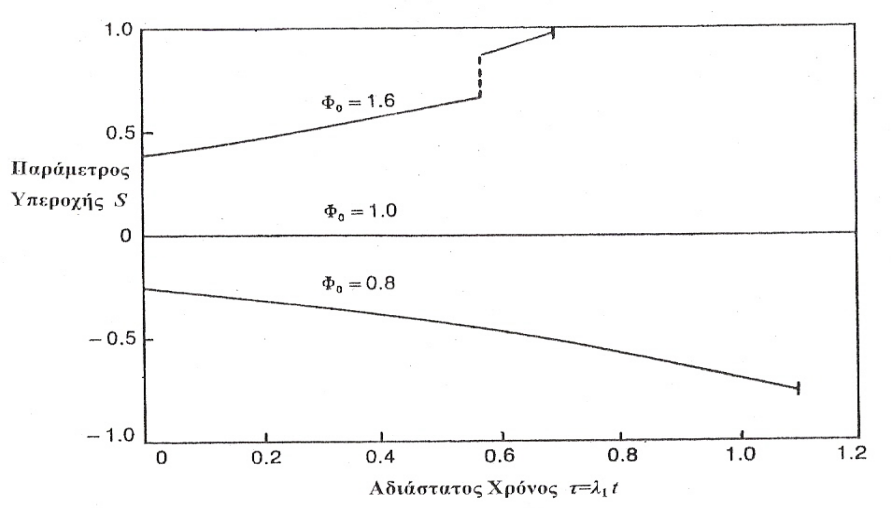


Διάγραμμα 3β.*Η 2η περίπτωση*



Διάγραμμα 3γ. *Η 3η περίπτωση*

Σχήμα 3.*Γραφικές Παραστάσεις των $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ και $X_2^{(2)}$ συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου τ*



Σχήμα 4. *Γραφικές Παραστάσεις των Παραμέτρων Υπεροχής S συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου τ*

8.6.Αριθμητική Επίλυση Αιτιοκρατικού Μοντέλου Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με Πυρά Περιοχής

Όπως είδαμε στην *Παράγραφο Ι.2.Α* του *1ου Τόμου*, ο Γραμμικός Νόμος περιγράφει την εξέλιξη μίας Μάχης η οποία διεξάγεται μεταξύ ***Ομογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων, όταν *δεν υπάρχουν Ενισχύσεις, ούτε Λειτουργικές Απώλειες*, και

- *κάθε πλευρά ρίπτει Πυρά Περιοχής, δηλαδή "τυφλά" ομοιόμορφα πυρά εναντίον* (ορατών ή αοράτων) *στόχων που δεν αλλάζουν περιοχή* (και που μπορεί να μην έχουν σταθερή πυκνότητα)

ή

- *κάθε πλευρά ρίπτει "Στοχευμένα" Πυρά προς την περιοχή που καταλαμβάνεται από την εχθρική πλευρά προϋποθέτοντας ότι οι απαιτούμενοι χρόνοι για την εξολόθρευση των διαφόρων στόχων είναι* ***αντιστρόφως ανάλογοι προς τον εκάστοτε υπάρχοντα αριθμό στόχων*** (: όσο λιγότεροι στόχοι τόσο πιο δύσκολη η εξολόθρευσή τους).

Θυμίζουμε πως σε μία τέτοια περίπτωση, οι Διαφορικές Εξισώσεις που δίνουν τα πλήθη $X_1(t)$ και $X_2(t)$ των εναπομενουσών (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων των δύο συγκρουόμενων αντιπάλων Δυνάμεων 1 και 2, αντιστοίχως, κατά την χρονική στιγμή t από την έναρξη της Μάχης, είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} &\frac{dX_1}{dt}(t) = -\theta_2(t)X_2(t)X_1(t) \\ &\frac{dX_2}{dt}(t) = -\theta_1(t)X_1(t)X_2(t) \\ &X_1(0) = X_1^0,\ X_2(0) = X_2^0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{dX_1}{dt}(t) = -\theta_2 X_2(t)\frac{X_1(t)}{X_1^0} \\ &\frac{dX_2}{dt}(t) = -\theta_1 X_1(t)\frac{X_2(t)}{X_2^0} \end{aligned}.$$

θ_1 *και* θ_2 είναι οι Ρυθμοί Φθερσεπιβολής των Δυνάμεων 1 και 2 αντιστοίχως. Στο συγκεκριμένο Μαθηματικό Μοντέλο, οι Ρυθμοί Φθερσεπιβολής θεωρούνται ότι

- είναι σταθεροί, θετικοί αριθμοί

και

- *οι τιμές τους είναι* a priori *γνωστές* (εκ των προτέρων ή έστω μετά την παρέ-

  λευση μικρού χρονικού διαστήματος από της ενάρξεως της Μάχης).

Προκειμένου τώρα να δώσουμε την γενικότερη διατύπωση αυτών των Διαφορικών Εξισώσεων έτσι όπως αυτές διαμορφώνονται κατά την περιγραφή μίας Μάχης που διεξάγεται μεταξύ ***Ετερογενώς Οπλισμένων*** Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών, θα χρειασθεί να υιοθετήσουμε και πάλι τις έννοιες και τους συμβολισμούς του *Ορισμού VIII.1* του *Εδαφίου 8.1*.

Έτσι, στην συνέχεια, θα υποθέτουμε ότι η Δύναμη 1 διαθέτει M_1 διαφορετικούς τύπους Οπλικών Συστημάτων

$$\text{ΟΣ}_1^{(1)}, \text{ΟΣ}_1^{(2)}, \ldots, \text{ΟΣ}_1^{(M_1)},$$

με αντίστοιχους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος κατά την χρονική στιγμή t από της ενάρξεως της Μάχης

$$X_1^{(1)} = X_1^{(1)}(t),\ X_1^{(2)} = X_1^{(2)}(t), \cdots X_1^{(M_1)} = X_1^{(M_1)}(t).$$

Ομοίως, θα υποθέτουμε ότι η Δύναμη 2 διαθέτει M_2 διαφορετικούς τύπους Οπλικών Συστημάτων

$$\text{ΟΣ}_2^{(1)}, \text{ΟΣ}_2^{(2)}, \ldots, \text{ΟΣ}_2^{(M_2)},$$

με αντίστοιχους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος κατά την χρονική στιγμή t από της ενάρξεως της Μάχης

$$X_2^{(1)} = X_2^{(1)}(t),\ X_2^{(2)} = X_2^{(2)}(t), \cdots X_2^{(M_2)} = X_2^{(M_2)}(t).$$

Όπως και στον *Ορισμό VIII.1*, θα συμβολίζουμε με $X_1 = X_1(t)$ τον (μη αρνητικό) πίνακα στήλη

$$X_1 = X_1(t) = \left[X_1^{(1)}\ X_1^{(2)} \cdots X_1^{(M_1)}\right]^T = \left[X_1^{(1)}(t)\ X_1^{(2)}(t) \cdots X_1^{(M_1)}(t)\right]^T$$

και με $X_2 = X_2(t)$ τον (μη αρνητικό) πίνακα στήλη

$$X_2 = X_2(t) = \left[X_2^{(1)}\ X_2^{(2)} \cdots X_2^{(M_2)}\right]^T = \left[X_2^{(1)}(t)\ X_2^{(2)}(t) \cdots X_2^{(M_2)}(t)\right]^T.$$

Ακόμη, για κάθε $i = 1,2,\ldots,M_1$ και $j = 1,2,\ldots,M_2$, θεωρούμε τον $(i \to j)-$***Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** ή $(i \to j)-$***Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Δύναμης 1 εναντίον της Δύναμης 2:***

$$\theta_1^{(i\to j)} = \theta_1^{(i\to j)}(t, x, y, z, X_1, X_2) \geq 0,$$

δηλαδή τον ρυθμό της συνολικής φθοράς που προκαλούν όλες οι (ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ της Δύναμης 1 σε βάρος των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ της Δύναμης 2.

Ομοίως, για κάθε $j = 1,2,...,M_2$ και $i = 1,2,...,M_1$, θεωρούμε τον $(j \to i)-$ ***Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** *ή* $(j \to i)-$ ***Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Δύναμης 2 εναντίον της Δύναμης 1:***

$$\theta_2^{(j\to i)} = \theta_2^{(j\to i)}(t, x, y, z, X_1, X_2) \geq 0,$$

δηλαδή τον ρυθμό της συνολικής φθοράς που προκαλούν όλες οι (ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ της Δύναμης 2 σε βάρος των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ της Δύναμης 1.

Τέλος, θεωρούμε και τον ***Συντελεστή της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** *ή* ***Ολικό Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Δύναμης 1 εναντίον της Δύναμης 2 δηλαδή τον*** $(M_2 \times M_1)$ ***μη αρνητικό πίνακα***

$$\Theta_1 := \left(\theta_1^{(i\to j)}\right)_{j,i} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(1\to 1)} & \theta_1^{(2\to 1)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to 1)} \\ \theta_1^{(1\to 2)} & \theta_1^{(2\to 2)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{(1\to M_2)} & \theta_1^{(2\to M_2)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to M_2)} \end{pmatrix},$$

καθώς και τον ***Συντελεστή της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** *ή* ***Ολικό Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Δύναμης 2 εναντίον της Δύναμης 1 δηλαδή τον*** $(M_1 \times M_2)$ ***μη αρνητικό πίνακα***

$$\Theta_2 := \left(\theta_2^{(j\to i)}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \theta_2^{(1\to 1)} & \theta_2^{(2\to 1)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to 1)} \\ \theta_2^{(1\to 2)} & \theta_2^{(2\to 2)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2^{(1\to M_1)} & \theta_2^{(2\to M_1)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to M_1)} \end{pmatrix}.$$

Κατόπιν των ανωτέρω, είμαστε σε θέση να δώσουμε την αναλυτική μορφή του Αιτιοκρατικού Μαθηματικού Μοντέλου Lanchester που περιγράφει κάθε Μάχη που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Πυρών Περιοχής:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

ΤΩΝ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

(για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται

μεταξύ

Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων

με ρίψη Πυρών Περιοχής):

$$\frac{dX_1^{(1)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to 1)} X_2^{(1)} \frac{X_1^{(1)}}{X_1^{(1)}(0)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_2^{(2)} \frac{X_1^{(1)}}{X_1^{(1)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_2^{(M_2)} \frac{X_1^{(1)}}{X_1^{(1)}(0)}$$

$$\frac{dX_1^{(2)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to 2)} X_2^{(1)} \frac{X_1^{(2)}}{X_1^{(2)}(0)} - \theta_2^{(2\to 2)} X_2^{(2)} \frac{X_1^{(2)}}{X_1^{(2)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 2)} X_2^{(M_2)} \frac{X_1^{(2)}}{X_1^{(2)}(0)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dX_1^{(M_1)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to M_1)} X_2^{(1)} \frac{X_1^{(M_1)}}{X_1^{(M_1)}(0)} - \theta_2^{(2\to M_1)} X_2^{(2)} \frac{X_1^{(M_1)}}{X_1^{(M_1)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to M_1)} X_2^{(M_2)} \frac{X_1^{(M_1)}}{X_1^{(M_1)}(0)}$$

$$\frac{dX_2^{(1)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to 1)} X_1^{(1)} \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_1^{(2)} \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_1^{(M_1)} \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)}$$

$$\frac{dX_2^{(2)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to 2)} X_1^{(1)} \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_1^{(2)} \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_1^{(M_1)} \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dX_2^{(M_2)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to M_2)} X_1^{(1)} \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)} - \theta_1^{(2\to M_2)} X_1^{(2)} \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)} - \cdots - \theta_1^{(M_1\to M_2)} X_1^{(M_1)} \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)}.$$

Εκφράζοντας τώρα το Σύστημα των παραπάνω Διαφορικών Εξισώσεων υπό μορφή πινάκων, λαμβάνουμε την ακόλουθη *Εξίσωση*:

$$
\begin{pmatrix} \dot{X}_1^{(1)} \\ \dot{X}_1^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{X}_1^{(M_1)} \\ \dot{X}_2^{(1)} \\ \dot{X}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{X}_2^{(M_2)} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{X_1^{(1)}}{X_1^{(1)}(0)} & & & & & & & \\
& \frac{X_1^{(2)}}{X_1^{(2)}(0)} & & & & \mathrm{O} & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \frac{X_1^{(M_1)}}{X_1^{(M_1)}(0)} & & & & \\
& & & & \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)} & & & \\
& & & & & \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)} & & \\
& \mathrm{O} & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)}
\end{pmatrix}
$$

$$
\times
\begin{pmatrix}
& & & & -\theta_2^{(1\to1)} & -\theta_2^{(2\to1)} & \cdots & -\theta_2^{(M_2\to1)} \\
& \mathrm{O} & & & -\theta_2^{(1\to2)} & -\theta_2^{(2\to2)} & \cdots & -\theta_2^{(M_2\to2)} \\
& & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
& & & & -\theta_2^{(1\to M_1)} & -\theta_2^{(2\to M_1)} & \cdots & -\theta_2^{(M_2\to M_1)} \\
-\theta_1^{(1\to1)} & -\theta_1^{(2\to1)} & \cdots & -\theta_1^{(M_1\to1)} & & & & \\
-\theta_1^{(1\to2)} & -\theta_1^{(2\to2)} & \cdots & -\theta_1^{(M_1\to2)} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \mathrm{O} & \\
-\theta_1^{(1\to M_2)} & -\theta_1^{(2\to M_2)} & \cdots & -\theta_1^{(M_1\to M_2)} & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ \vdots \\ X_1^{(M_1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_2^{(2)} \\ \vdots \\ X_2^{(M_2)} \end{pmatrix}
$$

ή πιο συνοπτικά:

ΕΝΙΑΙΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ

ΤΩΝ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

(για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Πυρών Περιοχής):

$$\dot{\mathrm{X}} = [diag(\mathrm{X}(0))]^{-1} diag(\mathrm{X})\Theta\, \mathrm{X}\,. \qquad (97)$$

όπου θέσαμε

$$\mathrm{X} := [X_1 \quad X_2]^T \qquad (98)$$

και όπου Θ είναι ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής των δύο Δυνάμεων, ήτοι ο μη αρνητικός $(M_1 + M_2)\times(M_1 + M_2)$ πίνακας

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix}. \qquad (99)$$

VIII.15. Αριθμητική Επίλυση του Διαφορικού Συστήματος (97). Υπάρχουν διάφοροι γνωστοί τρόποι *Αριθμητικής Ολοκλήρωσης* του Διαφορικού Συστήματος (97). Ο πιο απλός τρόπος, προέρχεται από τον *Τύπο*:

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{X}_n) = [diag(\mathrm{X}(0))]^{-1} diag(\mathrm{X}_n)\,\Theta\,\mathrm{X}_n$$

ο οποίος οδηγεί απ' ευθείας στο ακόλουθο ***Μη Γραμμικό*** *Αριθμητικό Σχήμα*:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

$$\mathrm{X}_{n+1} = \left(\mathrm{I}_n + \Delta t_n\, [diag(\mathrm{X}(0))]^{-1} diag(\mathrm{X}_n)\,\Theta\right)\mathrm{X}_n \qquad (100a)$$
$$(n = 0,1,2,\ldots N)$$

όπου

- X_n και X_{n+1} αναπαριστούν τις διανυσματικές τιμές του πίνακα-στήλη $\mathrm{X} := [X_1 \quad X_2]^T$ κατά τις χρονικές στιγμές t_n και t_{n+1}, αντιστοίχως,

και

- $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$ είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης. ■

VIII.16. Παρατήρηση. Εάν κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$, υπάρξουν Ενισχύσεις ή Αποσύρσεις Μονάδων κάποιων Οπλικών Συστημάτων από την Μάχη, τότε το *Αριθμητικό Σχήμα* $(100a)$ οφείλει να διασκευασθεί ως ακολούθως:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ
ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER
ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΙΣΧΥΣΕΩΝ Ή ΑΠΟΣΥΡΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$\mathrm{X}_{n+1} = \left(\mathrm{I}_n + \Delta t_n \left[diag(\mathrm{X}(0))\right]^{-1} diag(\mathrm{X}_n)\Theta\right)\mathrm{X}_n + \mathrm{E}_n \ (n = 0,1,2,\ldots N) \qquad (100b)$$

όπου

- X_n και X_{n+1} αναπαριστούν και πάλι τον πίνακα-στήλη $\mathrm{X} = \mathrm{X}(t) := [X_1 \ \ X_2]^T = [X_1(t) \ \ X_2(t)]^T$ κατά τις χρονικές στιγμές t_n και t_{n+1}, αντιστοίχως,
- $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$ είναι και πάλι το μήκος του χρονικού διαστήματος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης,

και

- E_n είναι ο πίνακας-στήλη

$$\mathrm{E}_n = \begin{pmatrix} E_1^{(1)}(\Delta t_n) \\ E_1^{(2)}(\Delta t_n) \\ \vdots \\ E_1^{(M_1)}(\Delta t_n) \\ E_2^{(1)}(\Delta t_n) \\ E_2^{(2)}(\Delta t_n) \\ \vdots \\ E_2^{(M_2)}(\Delta t_n) \end{pmatrix}$$

ο οποίος στις πρώτες M_1 γραμμές του αποδίδει το πλήθος των Μονάδων $E_1^{(i)}(\Delta t_n)$ των Ενισχύσεων ή Αποσύρσεων για κάθε Οπλικό Σύστημα $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots,M_1)$ της Δύναμης 1 κατά την διάρκεια Δt_n του χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$,ενώ στις επόμενες M_2 γραμμές του αποδίδει το πλήθος των Μονάδων $E_2^{(j)}(\Delta t_n)$ των Ενισχύσεων ή Αποσύρσεων για κάθε Οπλικό Σύστημα $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ $(j = 1,2,\ldots,M_2)$ της Δύναμης 2 κατά την διάρκεια Δt_n του ιδίου χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$. ■

VIII.17. Παρατήρηση. Αν και η Παράμετρος Υπεροχής

$$S := \frac{q^{(1)}\,\mathrm{X}(t)}{c_1\,\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)},$$

έτσι όπως ορίσθηκε στην *Εξίσωση* (70), αφορούσε μόνον στην περίπτωση διεξαγωγής Μάχης μεταξύ Τακτικών Ετερογενών Στρατευμάτων με Στοχευμένα Πυρά, μπορούμε να επεκτείνουμε την χρήση της στην περίπτωση της διεξαγωγής Μάχης μεταξύ Τακτικών Ετερογενών Στρατευμάτων με Πυρά Περιοχής. Ο λόγος είναι η ισχυρή ομοιότητα που εμφανίζουν οι *Εξισώσεις*:

$$\dot{\mathrm{X}} = \Theta\,\mathrm{X} \text{ (: Στοχευμένα Πυρά) και } \dot{\mathrm{X}} = diag(\mathrm{X})\,\Theta\,\mathrm{X} \text{ (: Πυρά Περιοχής)}$$

λόγω της αναλογίας που υπάρχει μεταξύ της παραγώγου $\dot{\mathrm{X}}$ και του γινομένου $\Theta\,\mathrm{X}$. Η μόνη διαφορά η οποία διαταράσσει την ομοιότητα αυτή, κυρίως καθώς η Διάρκεια της Μάχης αυξάνεται, εντοπίζεται και οφείλεται στην παρουσία του διαρκώς μεταβαλλόμενου πολλαπλασιαστικού παράγοντα $diag(\mathrm{X})$ στην δεύτερη *Εξίσωση*. Ωστόσο η διαφορά αυτή είναι ανύπαρκτη κατά την έναρξη της Μάχης, και πρακτικά θεωρείται σχεδόν επουσιώδης κατά τα πρώτα κρίσιμα στάδιά της. Ως εκ τούτου, μπορούμε να λέμε ότι *η συμπεριφορά της Παραμέτρου Υπεροχής* S *στα πρώτα στάδια μίας Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Τακτικών Ετερογενών Στρατευμάτων με Πυρά Περιοχής είναι ίδια με την συμπεριφορά της ίδιας παραμέτρου σε μία Μάχη που διεξάγεται μεταξύ Τακτικών Ετερογενών Στρατευμάτων με Στοχευμένα Πυρά*.

Η ομοιότητα αυτή επιτρέπει να διατυπώσουμε τον ακόλουθο πρακτικό *Κανόνα*:

η Δύναμη 1 έχει αρχική υπεροχή έναντι της Δύναμης 2 εάν $S_0 > 0$***,***

ενώ αντιθέτως

η Δύναμη 2 έχει αρχική υπεροχή έναντι της Δύναμης 1 εάν $S_0 < 0$***.***■

8.7.Αριθμητική Επίλυση Αιτιοκρατικού Μοντέλου Ανταρτοπόλεμου που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων

Υποθέτουμε προς στιγμήν ότι οι δύο αντίπαλες Ομογενείς Δυνάμεις 1 και 2 είναι Ομογενώς Οπλισμένες και ότι, κατά την χρονική στιγμή $t \geq 0$ από της ενάρξεως της Μάχης, έχουν αντίστοιχους πληθάριθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων.

$$X_1(t) \text{ και } X_2(t).$$

Επί πλέον, ας δεχθούμε προς το παρόν ότι, κάτω από αυτές τις υποθέσεις,

- η Δύναμη 1

- *ρίπτει Πυρά Περιοχής, δηλαδή "Τυφλά" ομοιόμορφα Πυρά εναντίον (ορατών ή αοράτων) στόχων που δεν αλλάζουν περιοχή (και που μπορεί να μην έχουν σταθερή πυκνότητα)*

ή

- *ρίπτει "Στοχευμένα" Πυρά προς την περιοχή που καταλαμβάνεται από την Δύναμη 2 προϋποθέτοντας ότι οι απαιτούμενοι χρόνοι για την εξολόθρευση των διαφόρων στόχων της Δύναμης 2 είναι* ***αντιστρόφως ανάλογοι προς τον εκάστοτε αριθμό διαθέσιμων στόχων*** *(:όσο λιγότεροι στόχοι τόσο πιο δύσκολη η εξολόθρευσή τους).*

και

- ότι η Δύναμη 2

- *ρίπτει "Τυφλά" ή "Στοχευμένα" Πυρά*

και

- *προκαλεί Ρυθμό Απωλειών σε βάρος της αντίπαλης Δύναμης ο οποίος είναι ανάλογος του πλήθους των εναπομενουσών οπλικών μονάδων της Δύναμης 1. Ο συντελεστής της αναλογίας είναι ο Ρυθμός Φθερσεπιβολής (:ο Συντελεστής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας)* θ_1 *της Δύναμης 1.*

Χωρίς βλάβη της γενικότητας και για λόγους συγκεκριμενοποίησης των συνθηκών της κατάστασης που περιγράφουμε, μπορούμε να υποθέτουμε ότι, στο ανωτέρω Μοντέλο Μάχης, ***η Δύναμη 1 είναι μία Συμβατική Τακτική Ομογενής Δύναμη, ενώ η Δύναμη 2 είναι μία Αντάρτικη Τακτική Ομογενής Δύναμη***, και ότι ***η διεξαγόμενη Μάχη είναι ένας Ανταρτοπόλεμος.***

Τότε, διατίθεται η ακόλουθη ισοδύναμη προς την περιγραφείσα στην *Παράγραφο Ι.2.Δ* του *1ου Τόμου* μαθηματική διατύπωση του Μοντέλου Μάχης:

$$\frac{dX_1}{dt}(t) = -\theta_2 X_2(t)$$
$$\frac{dX_2}{dt}(t) = -\theta_1 X_1(t)\frac{X_2(t)}{X_2^0}$$
$$X_1(0) = X_1^0, X_2(0) = X_2^0.$$

Οι Ρυθμοί Φθερσεπιβολής θ_1 *και* θ_2 των δύο Δυνάμεων 1 και 2 (αντιστοίχως) θεωρούνται ότι

- *είναι σταθεροί, θετικοί αριθμοί*

και

- *οι τιμές τους είναι a priori γνωστές (εκ των προτέρων ή έστω μετά την παρέλευση μικρού χρονικού διαστήματος από της ενάρξεως της Μάχης).*

Προκειμένου τώρα να δώσουμε την γενικότερη διατύπωση αυτών των Διαφορικών Εξισώσεων έτσι όπως αυτές διαμορφώνονται κατά την περιγραφή ενός Ανταρτοπόλεμου που διεξάγεται μεταξύ μίας ***Ετερογενώς Οπλισμένης*** Συμβατικής Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης και μίας ***Ετερογενώς Οπλισμένης*** Αντάρτικής Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης, θα χρειασθεί να υιοθετήσουμε και πάλι τις έννοιες και τους συμβολισμούς του *Ορισμού VIII.1* του *Εδαφίου 8.1*.

Έτσι, για την συνέχεια, θα δεχόμαστε ότι η Δύναμη 1 διαθέτει M_1 διαφορετικούς τύπους Οπλικών Συστημάτων

$$\text{ΟΣ}_1^{(1)}, \text{ΟΣ}_1^{(2)}, \ldots, \text{ΟΣ}_1^{(M_1)},$$

με αντίστοιχους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος κατά την χρονική στιγμή t από της ενάρξεως της Μάχης

$$X_1^{(1)} = X_1^{(1)}(t) \geq 0,\ X_1^{(2)} = X_1^{(2)}(t) \geq 0, \cdots X_1^{(M_1)} = X_1^{(M_1)}(t) \geq 0\,.$$

Ομοίως, θα δεχόμαστε αδιαλείπτως ότι η Δύναμη 2 διαθέτει M_2 διαφορετικούς τύπους Οπλικών Συστημάτων

$$\text{ΟΣ}_2^{(1)}, \text{ΟΣ}_2^{(2)}, \ldots, \text{ΟΣ}_2^{(M_2)},$$

με αντίστοιχους πληθαρίθμους (ομοειδών) οπλικών μονάδων για κάθε τύπο Οπλικού Συστήματος κατά την χρονική στιγμή t από της ενάρξεως της Μάχης

$$X_2^{(1)} = X_2^{(1)}(t) \geq 0,\ X_2^{(2)} = X_2^{(2)}(t) \geq 0, \cdots X_2^{(M_2)} = X_2^{(M_2)}(t) \geq 0\,.$$

Όπως και στον *Ορισμό VIII.1*, θα συμβολίζουμε με $X_1 = X_1(t)$ τον (μη αρνητικό) πίνακα στήλη

$$X_1 = X_1(t) = \left[X_1^{(1)}\ X_1^{(2)} \cdots X_1^{(M_1)}\right]^T = \left[X_1^{(1)}(t)\ X_1^{(2)}(t) \cdots X_1^{(M_1)}(t)\right]^T$$

και με $X_2 = X_2(t)$ τον (μη αρνητικό) πίνακα στήλη

$$X_2 = X_2(t) = \left[X_2^{(1)}\ X_2^{(2)} \cdots X_2^{(M_2)}\right]^T = \left[X_2^{(1)}(t)\ X_2^{(2)}(t) \cdots X_2^{(M_2)}(t)\right]^T.$$

Ακόμη, για κάθε $i = 1,2,\ldots,M_1$ και $j = 1,2,\ldots,M_2$, θα θεωρούμε τον $(i \to j)-$ ***Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** ή $(i \to j)-$ ***Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Συμβατικής Δύναμης 1 εναντίον της Αντάρτικης Δύναμης 2:***

$$\theta_1^{(i\to j)} = \theta_1^{(i\to j)}(t, x, y, z, X_1, X_2) \geq 0,$$

δηλαδή τον ρυθμό της συνολικής φθοράς που προκαλούν όλες οι (ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\text{ΟΣ}_1^{(i)}$ της Συμβατικής Δύναμης 1 σε βάρος των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος $\text{ΟΣ}_2^{(j)}$ της Αντάρτικης Δύναμης 2.

Ομοίως, για κάθε $j = 1,2,\ldots,M_2$ και $i = 1,2,\ldots,M_1$, θα θεωρούμε τον $(j \to i)-$ ***Συντελεστή Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** *ή* $(j \to i)-$ ***Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Αντάρτικης Δύναμης 2 εναντίον της Συμβατικής Δύναμης 1:***

$$\theta_2^{(j\to i)} = \theta_2^{(j\to i)}(t,x,y,z,X_1,X_2) \geq 0,$$

δηλαδή τον ρυθμό της συνολικής φθοράς που προκαλούν όλες οι (ομοειδείς) Οπλικές Μονάδες του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ της Δύναμης 2 σε βάρος των (ομοειδών) Οπλικών Μονάδων του Οπλικού Συστήματος $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ της Δύναμης 1.

Τέλος, θα θεωρούμε και τον ***Συντελεστή της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** *ή* ***Ολικό Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Συμβατικής Δύναμης 1 εναντίον της Αντάρτικης Δύναμης 2 δηλαδή τον*** $(M_2 \times M_1)$ ***μη αρνητικό πίνακα***

$$\Theta_1 := \left(\theta_1^{(i\to j)}\right)_{j,i} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(1\to 1)} & \theta_1^{(2\to 1)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to 1)} \\ \theta_1^{(1\to 2)} & \theta_1^{(2\to 2)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{(1\to M_2)} & \theta_1^{(2\to M_2)} & \cdots & \theta_1^{(M_1\to M_2)} \end{pmatrix},$$

όπως επίσης και τον ***Συντελεστή της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας*** *ή* ***Ολικό Ρυθμό Φθερσεπιβολής της Αντάρτικης Δύναμης 2 εναντίον της Συμβατικής Δύναμης 1 δηλαδή τον*** $(M_1 \times M_2)$ ***μη αρνητικό πίνακα***

$$\Theta_2 := \left(\theta_2^{(j\to i)}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \theta_2^{(1\to 1)} & \theta_2^{(2\to 1)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to 1)} \\ \theta_2^{(1\to 2)} & \theta_2^{(2\to 2)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_2^{(1\to M_1)} & \theta_2^{(2\to M_1)} & \cdots & \theta_2^{(M_2\to M_1)} \end{pmatrix}.$$

Κατόπιν των ανωτέρω, είμαστε σε θέση να δώσουμε την αναλυτική μορφή του Αιτιοκρατικού Μαθηματικού Μοντέλου Lanchester που περιγράφει κάθε Ανταρτοπόλεμο που διεξάγεται μεταξύ μίας ***Ετερογενώς Οπλισμένης*** Συμβατικής Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης και μίας ***Ετερογενώς Οπλισμένης*** Αντάρτικής Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης:

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

ΤΩΝ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

(για την περίπτωση Ανταρτοπόλεμου που διεξάγεται

μεταξύ

μίας Ετερογενώς Οπλισμένης Συμβατικής Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης

και

μίας Ετερογενώς Οπλισμένης Αντάρτικης Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης):

$$\frac{dX_1^{(1)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to 1)} X_2^{(1)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_2^{(2)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_2^{(M_2)}$$

$$\frac{dX_1^{(2)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to 2)} X_2^{(1)} - \theta_2^{(2\to 2)} X_2^{(2)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 2)} X_2^{(M_2)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dX_1^{(M_1)}}{dt} = -\theta_2^{(1\to M_1)} X_2^{(1)} - \theta_2^{(2\to M_1)} X_2^{(2)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to M_1)} X_2^{(M_2)}$$

$$\frac{dX_2^{(1)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to 1)} X_1^{(1)} \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_1^{(2)} \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_1^{(M_1)} \frac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)}$$

$$\frac{dX_2^{(2)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to 2)} X_1^{(1)} \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)} - \theta_2^{(2\to 1)} X_1^{(2)} \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)} - \cdots - \theta_2^{(M_2\to 1)} X_1^{(M_1)} \frac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dX_2^{(M_2)}}{dt} = -\theta_1^{(1\to M_2)} X_1^{(1)} \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)} - \theta_1^{(2\to M_2)} X_1^{(2)} \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)} - \cdots - \theta_1^{(M_1\to M_2)} X_1^{(M_1)} \frac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)}.$$

Εκφράζοντας τώρα το Σύστημα των παραπάνω Διαφορικών Εξισώσεων υπό μορφή πινάκων, λαμβάνουμε την ακόλουθη *Εξίσωση*:

$$
\begin{pmatrix} \dot{X}_1^{(1)} \\ \dot{X}_1^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{X}_1^{(M_1)} \\ \dot{X}_2^{(1)} \\ \dot{X}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \dot{X}_2^{(M_2)} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & \mathrm{O} & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & \dfrac{X_2^{(1)}}{X_2^{(1)}(0)} & & & \\
 & & & & & \dfrac{X_2^{(2)}}{X_2^{(2)}(0)} & & \\
 & \mathrm{O} & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \dfrac{X_2^{(M_2)}}{X_2^{(M_2)}(0)}
\end{pmatrix}
$$

$$
\times
\begin{pmatrix}
 & & & & & & & \\
 & & \mathrm{O} & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
-\theta_1^{(1\to 1)} & -\theta_1^{(2\to 1)} & \cdots & -\theta_1^{(M_1\to 1)} & & & & \\
-\theta_1^{(1\to 2)} & -\theta_1^{(2\to 2)} & \cdots & -\theta_1^{(M_1\to 2)} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \mathrm{O} & \\
-\theta_1^{(1\to M_2)} & -\theta_1^{(2\to M_2)} & \cdots & -\theta_1^{(M_1\to M_2)} & & & &
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
-\theta_2^{(1\to 1)} & -\theta_2^{(2\to 1)} & \cdots & -\theta_2^{(M_2\to 1)} \\
-\theta_2^{(1\to 2)} & -\theta_2^{(2\to 2)} & \cdots & -\theta_2^{(M_2\to 2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\theta_2^{(1\to M_1)} & -\theta_2^{(2\to M_1)} & \cdots & -\theta_2^{(M_2\to M_1)}
\end{matrix}
\begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ \vdots \\ X_1^{(M_1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_2^{(2)} \\ \vdots \\ X_2^{(M_2)} \end{pmatrix}
$$

ή πιο συνοπτικά την Εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & X_2^{(1)}/X_2^{(1)}(0) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & X_2^{(M_2)}/X_2^{(M_2)}(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στον ακόλουθο:

ΕΝΙΑΙΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗΣ

ΤΩΝ ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

(για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται
μεταξύ
μίας Ετερογενώς Οπλισμένης Συμβατικής Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης
και
μίας Ετερογενώς Οπλισμένης Αντάρτικης Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης):

$$\dot{\mathrm{X}} = \left[diag\left(\mathrm{Y}(0)\right)\right]^{-1} diag\left(\mathrm{Y}\right)\Theta\ \mathrm{X} \qquad (101)$$

όπου θέσαμε

$$\mathrm{X} := \left[X_1 \quad X_2\right]^T, \qquad (102)$$

$$\mathrm{Y} = \left(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad X_2^{(1)} \quad X_2^{(2)} \quad \cdots \quad X_2^{(M_2)}\right)^T, \qquad (103)$$

$$\mathrm{Y}(0) = \left(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad X_2^{(1)}(0) \quad X_2^{(2)}(0) \quad \cdots \quad X_2^{(M_2)}(0)\right)^T, \qquad (104)$$

και όπου Θ είναι ο Συντελεστής της Ολικής Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας ή Ολικός Ρυθμός Φθερσεπιβολής των δύο Δυνάμεων, ήτοι ο μη αρνητικός $(M_1 + M_2)\times(M_1 + M_2)$ πίνακας

$$\Theta := \begin{bmatrix} \mathrm{O} & -\Theta_2 \\ -\Theta_1 & \mathrm{O} \end{bmatrix}. \qquad (103)$$

VIII.18. Αριθμητική Επίλυση του Διαφορικού Συστήματος (101). Υπάρχουν διάφοροι γνωστοί τρόποι *Αριθμητικής Ολοκλήρωσης* του Διαφορικού Συστήματος (101). Ο πιο απλός τρόπος, προέρχεται από τον *Τύπο*:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{X}_{n+1}-\mathrm{X}_n\right)=\left[diag\left(\mathrm{Y}_0\right)\right]^{-1} diag\left(\mathrm{Y}_n\right)\,\Theta\,\mathrm{X}_n$$

ο οποίος οδηγεί απ' ευθείας στο ακόλουθο ***Μη Γραμμικό*** *Αριθμητικό Σχήμα*:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

$$\mathrm{X}_{n+1}=\left(\mathrm{I}_n+\Delta t_n\left[diag\left(\mathrm{Y}_0\right)\right]^{-1} diag\left(\mathrm{Y}_n\right)\Theta\right)\mathrm{X}_n \qquad (104a)$$
$$(n=0,1,2,\ldots N)$$

όπου

- X_n και X_{n+1} αναπαριστούν τις διανυσματικές τιμές του πίνακα-στήλη $\mathrm{X}:=\left[X_1 \quad X_2\right]^T$ κατά τις χρονικές στιγμές t_n και t_{n+1}, αντιστοίχως,
- Y_n αναπαριστά την διανυσματική τιμή του πίνακα-στήλη $\mathrm{Y}=\left(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad X_2^{(1)} \quad X_2^{(2)} \quad \cdots \quad X_2^{(M_2)}\right)^T$ κατά την χρονική στιγμή t_n,

και

- $\Delta t_n := t_{n+1}-t_n$ είναι το μήκος του χρονικού διαστήματος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης. ■

VIII.19. Παρατήρηση. Εάν κατά την διάρκεια του χρονικού διαστήματος $\left[t_n, t_{n+1}\right]$, υπάρξουν Ενισχύσεις ή Αποσύρσεις Μονάδων κάποιων Οπλικών Συστημάτων από την Μάχη, τότε το *Αριθμητικό Σχήμα* $(104a)$ οφείλει να διασκευασθεί ως ακολούθως:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LANCHESTER

ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΙΣΧΥΣΕΩΝ Ή ΑΠΟΣΥΡΣΕΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$\mathrm{X}_{n+1}=\left(\mathrm{I}_n+\Delta t_n\left[diag\left(\mathrm{Y}_0\right)\right]^{-1} diag\left(\mathrm{Y}_n\right)\Theta\right)\mathrm{X}_n+\mathrm{E}_n \qquad (104b)$$
$$(n=0,1,2,\ldots N)$$

όπου

- X_n και X_{n+1} αναπαριστούν και πάλι τον πίνακα-στήλη $\mathrm{X} = \mathrm{X}(t) := [X_1 \;\; X_2]^T = [X_1(t) \;\; X_2(t)]^T$ κατά τις χρονικές στιγμές t_n και t_{n+1}, αντιστοίχως,
- Y_n αναπαριστά την διανυσματική τιμή του πίνακα-στήλη $\mathrm{Y} = \left(1 \;\; 1 \;\; \cdots \;\; 1 \;\; X_2^{(1)} \;\; X_2^{(2)} \;\; \cdots \;\; X_2^{(M_2)}\right)^T$ κατά την χρονική στιγμή t_n,
- $\Delta t_n := t_{n+1} - t_n$ είναι και πάλι το μήκος του χρονικού διαστήματος της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης,

και

- E_n είναι ο πίνακας-στήλη

$$\mathrm{E}_n = \begin{pmatrix} E_1^{(1)}(\Delta t_n) \\ E_1^{(2)}(\Delta t_n) \\ \vdots \\ E_1^{(M_1)}(\Delta t_n) \\ E_2^{(1)}(\Delta t_n) \\ E_2^{(2)}(\Delta t_n) \\ \vdots \\ E_2^{(M_2)}(\Delta t_n) \end{pmatrix}$$

ο οποίος στις πρώτες M_1 γραμμές του αποδίδει το πλήθος των Μονάδων $E_1^{(i)}(\Delta t_n)$ των Ενισχύσεων ή Αποσύρσεων για κάθε Οπλικό Σύστημα $\mathrm{O}\Sigma_1^{(i)}$ $(i = 1,2,\ldots,M_1)$ της Δύναμης 1 κατά την διάρκεια Δt_n του χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$,ενώ στις επόμενες M_2 γραμμές του αποδίδει το πλήθος των Μονάδων $E_2^{(j)}(\Delta t_n)$ των Ενισχύσεων ή Αποσύρσεων για κάθε Οπλικό Σύστημα $\mathrm{O}\Sigma_2^{(j)}$ $(j = 1,2,\ldots,M_2)$ της Δύναμης 2 κατά την διάρκεια Δt_n του ιδίου χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$. ■

VIII.20. Παρατήρηση. Λόγω της προφανούς αναλογίας που εμφανίζει η Εξίσωση (101) με την αντίστοιχη Εξίσωση (5) του Μαθηματικού Μοντέλου για την περίπτωση Μάχης που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων με ρίψη Στοχευμένων Πυρών, η Παράμετρος Υπεροχής

$$S := \frac{q^{(1)}\,\mathrm{X}(t)}{c_1\,\widetilde{V}_1^T\,X_1(0)},$$

έτσι όπως ορίσθηκε στην *Εξίσωση* (70), μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο ανωτέρω Μαθηματικό Μοντέλο (101) για την περίπτωση Ανταρτοπόλεμου που διεξάγεται μεταξύ Ετερογενώς Οπλισμένων Συμβατικών Τακτικών Στρατιωτικών Δυνάμεων. (Ωστόσο, θα πρέπει να επισημανθεί ότι, στην τελευταία αυτή περίπτωση, η Εξίσωση $S = 0$ δεν μπορεί να συνεπάγεται την ανάλογη πρόβλεψη της *Πρότασης VIII.11* ότι δηλαδή αμφότερες οι δύο Δυνάμεις θα περιορίζουν αναλόγως τα Μεγέθη τους. ■

8.8. Βέλτιστη Τοποθέτηση των Αμυντικών Δυνάμεων

8.8.Α. Στοιχειώδεις Τύποι Αμυντικών Στρατηγικών

Είναι σαφές ότι πρέπει να καθορισθεί εκ των προτέρων ένας τρόπος Κατάλληλης Τοποθέτησης των Αμυντικών Δυνάμεων έτσι ώστε να προστατεύεται αποτελεσματικά κάθε συγκεκριμένο ***Κρίσιμο Διάστημα*** κείμενο επί της *Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου*. Για τον σκοπό αυτό, πρέπει να είναι (απολύτως ή έστω με κάποιον υψηλό βαθμό αξιοπιστίας της πληροφόρησης) γνωστές όλες οι κινήσεις που θα επιχειρηθούν από μέρους της Επιτιθέμενης Πλευράς προς εκπλήρωση των βασικών στόχων της. Τέτοιοι βασικοί στόχοι-προτεραιότητες της Επιτιθέμενης Πλευράς είναι:

1. **η μεγιστοποίηση της << *Ελεγχόμενης Εδαφικής Έκτασης από την Επιτιθέμενη*** (:territory control)>>

2. **η μεγιστοποίηση του λόγου της <<*Ελεγχόμενης Εδαφικής Έκτασης από την Επιτιθέμενη* >> προς το <<*Πλήθος των Απωλειών της Επιτιθέμενης*** (:attack attrition)>>, δηλαδή η μεγιστοποίηση των εδαφικών κερδών που θα έχει η Επιτιθέμενη με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση του αριθμού των Απωλειών της
3. **η μεγιστοποίηση της <<*Διάρκειας της Ένοπλης Σύγκρουσης*** (:duration of the armed conflict)>>, δηλαδή η ευχέρεια προέκτασης της Διάρκειας της Ένοπλης Σύγκρουσης για τόσο χρονικό διάστημα όσο είναι αναγκαίο προκειμένου να καταβληθεί η αντίπαλη Αμυνόμενη Πλευρά
4. **η μεγιστοποίηση του <<*Πλήθους των Απωλειών της Αμυνόμενης Πλευράς*** (:defensive force attrition)>>
5. **η μεγιστοποίηση του λόγου του <<*Πλήθους των Απωλειών της Αμυνόμενης Πλευράς* >> προς το <<*Πλήθος των Απωλειών της Επιτιθέμενης Πλευράς*>>**
6. **η μεγιστοποίηση της <<*Χρονικής Διάρκειας Ελέγχου της Εδαφικής Έκτασης από την Επιτιθέμενη*** (:territory controlled per duration)>>.

Φυσικά, υπάρχουν και άλλοι βασικοί στόχοι-προτεραιότητες που μπορούν να τεθούν από μέρους της Επιτιθέμενης Πλευράς, όπως για παράδειγμα είναι ο ***Έλεγχος Συγκεκριμένων Ειδικών Περιοχών*** (:control of specified territory). Για κάθε συνδυασμό τέτοιων βασικών στόχων-προτεραιοτήτων της Επιτιθέμενης, η Αμυνόμενη Πλευρά οφείλει να έχει σχεδιάσει μία αντίστοιχη κατάλληλη Στρατηγική προκειμένου να ελαχιστοποιήσει τα εις βάρος της αποτελέσματα που θα προκύψουν από τις προσπάθειες της Επιτιθέμενης.

Στο παρόν *Εδάφιο 8.8*, θα παρουσιάσουμε έναν αποτελεσματικό τρόπο Άμυνας, όπως αυτός προτάθηκε για πρώτη φορά το 1993 από τον R. Gupta ([Gupta, 1993]). Ο συγκεκριμένος τρόπος Άμυνας αποσκοπεί στην ελαχιστοποίηση των Εδαφών που θα κατακτήσει η Επιτιθέμενη Πλευρά.

Υπάρχουν δύο κύριοι στοιχειώδεις τύποι Αμυντικών Στρατηγικών:

- η ***Κατανεμημένη Στατική Άμυνα*** (:distributed static defense)

και

- η ***Συμπυκνωμένη Μετακινούμενη Άμυνα*** (:concentrated mobile defense).

Στην Κατανεμημένη Στατική Άμυνα, εν όψει Επίθεσης οι Οπλικές Μονάδες παρατάσσονται πίσω από την ***Αμυντική Γραμμή*** ή ***Γραμμή του Αμυντικού Μετώπου*** (:front line) σε ειδικές τοποθεσίες, ενώ, στην Συμπυκνωμένη Μετακινούμενη Άμυνα, διατίθεται ένα ευρύ ποσοστό Οπλικών Μονάδων υψηλής κινητικότητας με σκοπό την γρήγορη απάντηση σε κάθε Επίθεση που θα εκδηλωθεί σε οποιοδήποτε σημείο.

Οι δύο κύριοι τύποι Άμυνας συγκρίνονται στο παρακάτω *Σχήμα 5* μέσω ενός συγκεκριμένου *Παραδείγματος* Μάχης. Σύμφωνα με αυτό το *Παράδειγμα*, η Τακτική Στρατιωτική Δύναμη 2 επιτίθεται με 4000 Οπλικές Μονάδες εναντίον της Τακτικής Στρατιωτικής Δύναμης 1 που αμύνεται ομοίως με 4000 Οπλικές Μονάδες .

- σε περίπτωση που η Δύναμη 1 εφαρμόσει την Αμυντική Στρατηγική της Στατικής Άμυνας, τότε θα κατανείμει τις Οπλικές της Μονάδες σε 4 ξεχωριστές Εκτάσεις $(B_1), (B_2), (B_3)$ και (B_4) έτσι ώστε σε κάθε μία από τις αυτές να βρίσκονται ακριβώς 1000 Οπλικές Μονάδες .
- αντιθέτως, σε περίπτωση που η Δύναμη 1 εφαρμόσει την Αμυντική Στρατηγική της Μετακινούμενης Άμυνας, τότε θα έχει, ανά πάσα στιγμή, την ευχέρεια της διαρκούς μετακίνησης του συνόλου των Οπλικών της Μονάδων.

Σε κάθε περίπτωση, θα υποτίθεται ότι

η Μάχη διεξάγεται με Στοχευμένα Πυρά

και ότι

οι Ρυθμοί Φθερσεπιβολής (Συντελεστές Στρατιωτικής Αποτελεσματικότητας) είναι σταθεροί και ίσοι για τις δύο Δυνάμεις.

Στην περίπτωση που η Δύναμη 1 εφαρμόσει την Αμυντική Στρατηγική της Στατικής Άμυνας και η Δύναμη 2 επιτεθεί με όλες τις Οπλικές της Μονάδες μόνον εναντίον μίας Έκτασης, έστω της (B_3), τότε η Επιτιθέμενη Δύναμη 2 θα έχει σαφή Υπεροχή, γιατί

$$\Phi_0 = 0.25$$

(προηγουμένως, βλέπε *Εδάφιο 8.3*), και η Μάχη προβλέπεται ότι θα ολοκληρωθεί, με την διάσπαση της Αμυντικής Γραμμής της Δύναμης 1, σε χρόνο:

$$\tau = 0.255,$$

(όπου θέσαμε $\tau := \widetilde{\lambda}\, t\ (= \lambda_1\, t)$, βλέπε *Εδάφιο 8.5*), με

1000 Απώλειες για την Αμυνόμενη Δύναμη 1

και μόνον

127 Απώλειες για την Επιτιθέμενη Δύναμη 2.

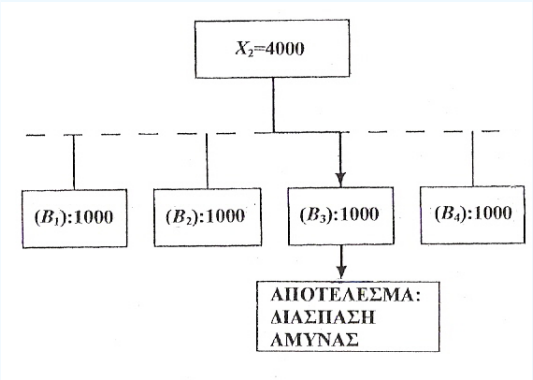
Αντιθέτως, στην περίπτωση που η Δύναμη 1 εφαρμόσει την Αμυντική Στρατηγική της Μετακινούμενης Άμυνας, τότε προβλέπεται ότι

οι δύο αντίπαλες Δυνάμεις θα χάνουν τις Οπλικές τους Μονάδες με ίδιο ρυθμό,

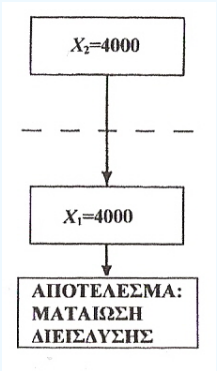
και

η Αμυνόμενη Δύναμη 1 θα κατορθώσει να σταματήσει την διείσδυση της Επιτιθέμενης Δύναμης 2.

Σε σύγκριση μάλιστα με την 1η περίπτωση της Στατικής Άμυνας, τώρα προβλέπεται ότι, σε χρονικό διάστημα $\tau = 0.255$, τόσο η Επιτιθέμενη όσο και η Αμυνόμενη Δύναμη θα έχουν από 902 Απώλειες Οπλικών Μονάδων.



Απώλειες Αμυνόμενης Δύναμης 1: 1000
Απώλειες Επιτιθέμενης Δύναμης 2: 127
Περίπτωση 1η : Στατική Άμυνα (: Διάσπαση της Αμυντικής Γραμμής)



Απώλειες Αμυνόμενης Δύναμης 1: 902
Απώλειες Επιτιθέμενης Δύναμης 2: 902
Περίπτωση 2η : Μετακινούμενη Άμυνα (: Ματαίωση Διείσδυσης)

Σχήμα 5. *Συγκριτικό Παράδειγμα Στατικής και Μετακινούμενης Άμυνας*

Στο συγκεκριμένο *Παράδειγμα* του *Σχήματος 5* καθίστανται πρόδηλα τα πλεονεκτήματα της Μετακινούμενης Άμυνας, τα οποία θα εξετασθούν περαιτέρω στην συνέχεια.

8.8.Β. Βέλτιστη Μετακινούμενη Άμυνα όταν ο Αντίπαλος επιχειρεί να διεισδύσει από ένα Σημείο του Διαστήματος της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου

Προκειμένου να αναπτύξουμε και να εξηγήσουμε την Στρατηγική της (Συμπυκνωμένης) Μετακινούμενης Άμυνας όταν ο Αντίπαλος επιχειρεί να διεισδύσει μέσω ενός Διαστήματος κειμένου επί της επιλεγείσας Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου, πρέπει να προβούμε στις ακόλουθες (όχι και τόσο δεσμευτικές) γενικές παραδοχές:

1. ***οι δύο αντίπαλες Δυνάμεις (Επιτιθέμενη και Αμυνόμενη) τίθενται αντιμέτωπες λαμβάνοντας θέσεις, η μία απέναντι της άλλης, στα δύο μέρη εκατέρωθεν ενός <u>μόνον</u> ευθυγράμμου τμήματος μήκους***

   $$M$$

   της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου
2. ***κάθε μία από τις δύο Δυνάμεις (Επιτιθέμενη και Αμυνόμενη) είναι ενήμερη (πλήρως ή έστω κατά προσέγγιση) για το μέγεθος της Αντιπάλου της***
3. ***η αρχική προσπάθεια διείσδυσης της Επιτιθέμενης θα επιχειρηθεί από <u>ένα μόνον</u> σημείο*** $(0,z)$ ***του ευθυγράμμου τμήματος μήκους*** M ***το οποίο όμως σημείο δεν είναι γνωστό πριν εκδηλωθεί η πρώτη Επίθεση,*** (και, ως εκ τούτου, ***η θεώρηση της μεταβλητής*** z ***από μέρους της Αμυνόμενης Πλευράς θα πρέπει να γίνει με στοχαστικό τρόπο***)
4. επειδή πρώτιστη από τις βασικές προτεραιότητες-στόχους της Επιτιθέμενης είναι (συνήθως) η κατάκτηση όσο το δυνατόν περισσοτέρων εδαφών, θα υποθέτουμε ότι ***η μετακίνηση των Οπλικών Μονάδων της Επιτιθέμενης πραγματοποιείται κάθετα προς τηνΑμυντική Γραμμή και με ταχύτητα***

   $$v_E$$
5. ***σε καιρό ειρήνης όλες οι Οπλικές Μονάδες της Αμυνόμενης Πλευράς παραμένουν φυλασσόμενες σε Στρατιωτική Βάση που βρίσκεται στο σημείο***

   $$(x,y)$$

   από το οποίο οι Μονάδες αυτές μπορούν να εφορμήσουν μετακινούμενες με ταχύτητα

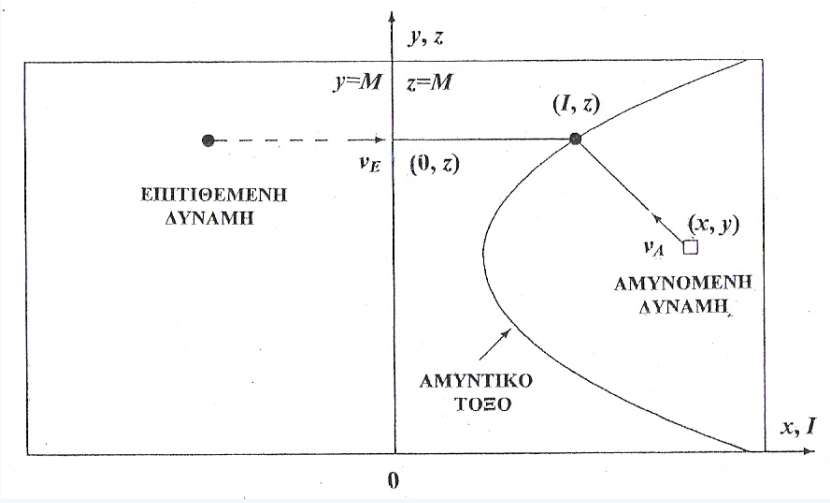
   $$v_A$$

προς ένα σημείο

$$(I, z)$$

ενός Αμυντικού Τόξου (: defense locus) ***πίσω από την Γραμμή του Αμυντικού Μετώπου προκειμένου να αντιμετωπίσουν την Επιτιθέμενη Δύναμη.***

Το σενάριο που αναπαριστά τις αρχικές θέσεις που καταλαμβάνουν η Επιτιθέμενη και η Αμυνόμενη Δύναμη κατά την έναρξη της αντιπαράθεσής τους, σύμφωνα με τις παραπάνω πέντε συνθήκες, αποδίδεται σχηματικά στο:



Σχήμα 6. *Αρχικές Θέσεις Αμυνόμενων και Επιτιθέμενων Οπλικών Μονάδων*

Η αντικειμενική επιδίωξη της Αμυνόμενης Πλευράς είναι ***η ελαχιστοποίηση της διείσδυσης της Επιτιθέμενης Δύναμης πίσω από την Αμυντική Γραμμή.***

Προκειμένου λοιπόν να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των Οπλικών Μονάδων της Επιτιθέμενης που θα κατορθώσουν να διεισδύσουν πίσω από την Αμυντική Γραμμή, η Στρατιωτική Βάση εντός της οποίας φυλάσσονται οι Οπλικές Μονάδες της Αμυνόμενης θα πρέπει να εδράζει κοντά στην Αμυντική Γραμμή, σε ένα σημείο

$$(x, y)$$

που θα έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε Οπλική Μονάδα της Αμυνόμενης να μπορεί να εφορμήσει ταχύτατα προς ένα αντίστοιχο σημείο επί του Αμυντικού Τόξου από το οποίο θα εμποδίζει αποτελεσματικά την περαιτέρω διείσδυση της Επιτιθέμενης από την Αμυντική Γραμμή.

Έτσι, έχοντας υπόψη αυτό, είναι λογικό να δεχόμαστε ότι, *εφόσον η διείσδυση της Επιτιθέμενης επιχειρηθεί από ένα σημείο*

$$(0, z),$$

της Αμυντικής Γραμμής,

6. ***ο χρόνος που θα απαιτηθεί από μέρους της Επιτιθέμενης για να διανύσει ένα διάστημα μήκους*** I ***ισούται με τον χρόνο που θα απαιτηθεί για την μεταφορά της Αμυνόμενης Δύναμης από το σημείο*** (x, y) ***της Στρατιωτικής Βάσης στο σημείο*** (I, z) ***του Αμυντικού Τόξου***

Με άλλα λόγια, θα δεχόμαστε ότι ισχύει η ακόλουθη *Σχέση*:

$$\frac{I}{v_E} = \frac{\sqrt{(x-I)^2 + (y-z)^2}}{v_A}, \qquad (105)$$

όπου $\sqrt{(x-I)^2 + (y-z)^2}$ είναι η (Ευκλείδεια) απόσταση μεταξύ των σημείων (x, y) και (I, z).

Φυσικά, το ακριβές σημείο $(0, z)$ της Αμυντικής Γραμμής από το οποίο θα επιχειρηθεί η διείσδυση της Επιτιθέμενης Δύναμης δεν μπορεί να είναι εκ των προτέρων γνωστό. Επομένως η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει να υπολογίσει το σημείο αυτό μόνον κατ' εκτίμηση. Παρόλα ταύτα, μπορούμε να αξιώσουμε την ύπαρξη μίας ευλογοφανούς συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

$$p(z)$$

(διακριτής ή συνεχούς) η οποία μπορεί να ορισθεί σχετικά εύκολα λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως είναι:

η αντίληψη της Αμυνόμενης Πλευράς σχετικά με την στρατηγική αξία που μπορεί να αποδίδεται από μέρους της Επιτιθέμενης στους διάφορους Στόχους εντός της Αμυνόμενης Περιοχής,

καθώς και

η τοπογραφική διαμόρφωση του εδάφους σ' ένα σημείο του Κρίσιμου Διαστήματος επί της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου η οποία μπορεί να επιτρέψει την ευκολότερη διείσδυση της Επιτιθέμενης μέσω του σημείου αυτού.

Επειδή η Επιτιθέμενη Δύναμη αποσκοπεί στο να διασπάσει το Αμυντικό Μέτωπο επιχειρώντας από ένα σημείο $(0,z)$ του Κρίσιμου Διαστήματος μήκους M επί της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου, πρέπει να ισχύει η εξής προφανής *Σχέση*:

$$\int_0^M p(z)dz = 1. \qquad (106)$$

Αναλόγως προς τις τιμές που μπορούν να λαμβάνουν οι ταχύτητες v_E και v_A, διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1η :** $v_E = v_A$,
- **Περίπτωση 2η :** $v_E < v_A$,

και

- **Περίπτωση 3η :** $v_E > v_A$.

8.8.Β.i. Η Περίπτωση κατά την οποία η Ταχύτητα Μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την Ταχύτητα Μετακίνησης της Αμυνόμενης

Όταν $v_E = v_A$, από την *Εξίσωση* (105) έπεται αμέσως ότι η ***διείσδυση*** (: infiltration) ***της Επιτιθέμενης Πλευράς***, δηλαδή η απόσταση που θα διανύσει η Επιτιθέμενη πίσω από την Αμυντική Γραμμή εντός της Αμυνόμενης Περιοχής, είναι:

$$I = I(x,y,z) = \frac{x^2 + (y-z)^2}{2x}. \qquad (107)$$

Έτσι, η ***αναμενόμενη διείσδυση*** $\bar{I}(x,y,z)$ ***της Επιτιθέμενης Πλευράς***, δηλαδή η απόσταση που αναμένεται να διανύσει η Επιτιθέμενη πίσω από την Αμυντική Γραμμή εντός της Αμυνόμενης Περιοχής, θα δίνεται από τον *Τύπο*:

$$\bar{I}(x,y)=\int_0^M p(z)I(x,y,z)dz \qquad (108)$$

Κατόπιν τούτου, η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει να επιλέξει το βέλτιστο σημείο (x_*, y_*) εγκατάστασης της Στρατιωτικής της Βάσης κατά τέτοιο τρόπο ώστε η αναμενόμενη διείσδυση $\bar{I}(x,y)$ της Επιτιθέμενης να καταστεί ελάχιστη, δηλαδή θα πρέπει

$$\bar{I}(x_*, y_*)=\min_{x,y}\bar{I}(x,y)=\min_{x,y}\left[\int_0^M p(z)\,I(x,y,z)dz\right]. \qquad (109)$$

Σύμφωνα με τα της *Παραγράφου 5.1.Β*, η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν ισχύουν οι εξής δύο *Εξισώσεις*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^M p(z)I(x,y,z)dz\right]\Bigg|_{x=x_*,y=y_*}=0 \qquad (110)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_0^M p(z)I(x,y,z)dz\right]\Bigg|_{x=x_*,y=y_*}=0\,. \qquad (111)$$

Στην προκείμενη περίπτωση, επειδή μπορεί να εφαρμοσθεί ο *Κανόνας του Leibnitz* περί αμοιβαίας μετάθεσης των συμβόλων της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, οι ανωτέρω δύο *Εξισώσεις* αντικαθίστανται από τις ακόλουθες:

$$\int_0^M \frac{\partial}{\partial x}[p(z)I(x,y,z)]dz\Bigg|_{x=x_*,y=y_*}=0 \qquad (112)$$

και

$$\int_0^M \frac{\partial}{\partial y}[p(z)I(x,y,z)]dz\Bigg|_{x=x_*,y=y_*}=0\,, \qquad (113)$$

αντιστοίχως.

Παραγωγίζοντας τώρα την Σχέση (107) ως προς x και y, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της συνάρτησης I :

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{1}{2}-\frac{(y-z)^2}{2x^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial I}{\partial y}=\frac{y-z}{x}, \qquad (114)$$

οπότε, αντικαθιστώντας τις δύο αυτές μερικές παραγώγους μέσα στις αντίστοιχες *Εξισώσεις* (112) και (113), οδηγούμαστε στις :

$$\int_0^M p(z)\frac{\partial I}{\partial x}dz\Bigg|_{x=x_*,y=y_*}=\int_0^M p(z)\left(\frac{1}{2}-\frac{(y_*-z)^2}{2x_*^{\,2}}\right)dz=0 \qquad (115)$$

και

$$\int_0^M p(z)\frac{\partial I}{\partial y}dz\Bigg|_{x=x_*,y=y_*}=\int_0^M p(z)\frac{(y_*-z)}{x_*}dz=0. \qquad (116)$$

Επιλύοντας πρώτα την (116) ως προς y_*, βλέπουμε πως ισχύει η *Εξίσωση*:

$$y_*\int_0^M p(z)dz=\int_0^M z\,p(z)dz,$$

η οποία, λόγω της *Σχέσης* (106), γίνεται:

$$y_*=\int_0^M z\,p(z)dz=:\mu. \qquad (117)$$

Στην τελευταία *Σχέση*, το σύμβολο μ δηλώνει την αναμενόμενη (μέση) τιμή της μεταβλητής z και *αναπαριστά το σημείο επί της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά αναμένεται να επιτεθεί εναντίον της Αμυνόμενης*. Άρα, ***η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει να έχει εγκαταστήσει την Στρατιωτική της Βάση σε ένα σημείο*** (x_*,y_*) ***με τεταγμένη***

$$y_*=\mu. \qquad (118)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια την τιμή αυτή της τεταγμένης y_* μέσα στην *Εξίσωση* (115), λαμβάνουμε την *Εξίσωση*:

$$\int_0^M p(z)\left(\frac{1}{2}-\frac{(\mu-z)^2}{2x_*^{\,2}}\right)dz=0$$

από την οποία, και πάλι λόγω της *Σχέσης* (106), έπεται η:

$$x_*^{\ 2} = \int_0^M (\mu - z)^2 p(z) d\, z =: \sigma^2$$

Στην *Σχέση* αυτή, το σύμβολο σ^2 δηλώνει την διασπορά της μεταβλητής z και *αναπαριστά την διάχυση που εμφανίζει η κατανομή της (πυκνότητας) πιθανότητας* $p(z)$ *γύρω από την αναμενόμενη τιμή* μ. Άρα, ***η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει να έχει εγκαταστήσει την Στρατιωτική Βάση της σε ένα σημείο*** (x_*, y_*) ***με τετμημένη***

$$x_* = \sigma\,. \qquad (119)$$

Έτσι, κατ' αυτόν τον τρόπο, αποδείξαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

VIII.21. Πρόταση.(Το *σ-μ* Θεώρημα του Gupta). ***Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την ταχύτητα μετακίνησης της Αμυνόμενης Δύναμης.***

Τότε, ο Στρατιωτικός Διοικητής της Αμυνόμενης Πλευράς θα έχει την δυνατότητα να ελαχιστοποιήσει μέσα στο έδαφος που υπερασπίζεται την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης Πλευράς πίσω από την Αμυντική Γραμμή, προλαβαίνοντας να στείλει κάθε μία Οπλική του Μονάδα πάνω σε μία Οπλική Μονάδα του Εισβολέα εφόσον προηγουμένως καταφέρει να συγκεντρώσει όλες τις Οπλικές του Μονάδες στο σημείο

$$(\sigma, \mu).$$

Το σύμβολο μ *αναπαριστά το σημείο επί της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά* **αναμένεται** *να επιτεθεί εναντίον της Αμυνόμενης, ενώ το σύμβολο* σ *αναπαριστά την τυπική απόκλιση της κατανομής* (δηλαδή, *της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας*) *του εν λόγω σημείου*. ■

VIII.22. Πόρισμα. Ιδιαιτέρως για την περίπτωση που η στοχαστική μεταβλητή z **ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας, *εάν*, δηλαδή,**

$$p(z) = \frac{1}{M},$$

και, εφόσον η ταχύτητα μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την ταχύτητα μετακίνησης της Αμυνόμενης Δύναμης, τότε

(i). ***Ο Στρατιωτικός Διοικητής της Αμυνόμενης Πλευράς θα έχει την δυνατότητα να ελαχιστοποιήσει μέσα στο έδαφος που υπερασπίζεται την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης Πλευράς πίσω από την Αμυντική Γραμμή, προλαβαίνοντας να στείλει κάθε μία Οπλική του Μονάδα πάνω σε μία Οπλική Μονάδα του Εισβολέα εφόσον προηγουμένως καταφέρει να συγκεντρώσει όλες τις Οπλικές του Μονάδες στο σημείο***

$$(\sigma,\mu)=\left(\frac{M}{\sqrt{12}},\frac{M}{2}\right) \qquad (120)$$

(επειδή, σύμφωνα με το *σ-μ Θεώρημα του Gupta*, το σημείο στο οποίο πρέπει να έχουν συγκεντρωθεί οι Οπλικές Μονάδες της Αμυνόμενης Πλευράς είναι το σημείο (σ,μ) με

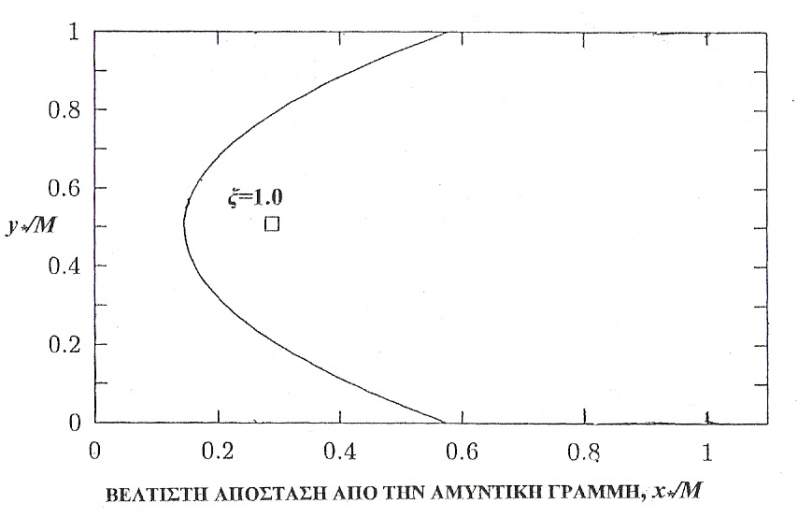
$$\sigma^2=\int_0^M \frac{1}{M}(\mu-z)^2\,dz=\frac{M^2}{12} \text{ και } \mu=\int_0^M z\,p(z)dz=\int_0^M \frac{z}{M}dz=\frac{M}{2}). \qquad (121)$$

(ii). ***Επί πλέον, κάτω από τις ίδιες ως άνω υποθέσεις,*** **(μετά από αντικατάσταση των Σχέσεων (121) μέσα στην (107))** ***έχουμε την ακόλουθη κομψή Σχέση που υφίσταται μεταξύ της διείσδυσης I της Επιτιθέμενης Πλευράς και του ύψους z του σημείου της Αμυντικής Γραμμής διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά θα επιχειρήσει την διείσδυσή της στο έδαφος της Αμυνόμενης:***

$$I=\frac{\frac{M^2}{12}+\left(\frac{M}{2}-z\right)^2}{\frac{2M}{\sqrt{12}}}.\blacksquare \qquad (121)$$

Στο παρακάτω *Σχήμα 7*, αποδίδεται γραφικά η βέλτιστη θέση (x_*, y_*) εγκατάστασης για την Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης, καθώς επίσης και τα αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα, στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ισχύει

$$\xi = 1.0:$$



Σχήμα 7. *Βέλτιστες Θέσεις και αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα στην ειδική περίπτωση ξ*=1.0

8.8.B.ii. Η Περίπτωση κατά την οποία η Ταχύτητα Μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι μικρότερη από την Ταχύτητα Μετακίνησης της Αμυνόμενης

Εάν $v_E < v_A$, τότε υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέρη της *Εξίσωσης* (105) και θέτοντας

$$\xi = \frac{v_E}{v_A} \quad (<1),$$

λαμβάνουμε την *Εξίσωση*:

$$I^2\,\xi^{-2} = (x-I)^2 + (y-z)^2 .$$

Η θετική λύση I αυτής δίνεται από τον *Τύπο*:

$$I = \frac{-x + \sqrt{x^2 + \left(\xi^{-2}-1\right)\left(x^2 + [y-z]^2\right)}}{\left(\xi^{-2}-1\right)} . \qquad (122)$$

Όπως και στην *1η Περίπτωση* της *Υποπαραγράφου 8.8.Β.i*, οι *Εξισώσεις* (112) και (113) μπορούν και πάλι να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να προσδιορισθεί το βέλτιστο σημείο (x_*, y_*) εγκατάστασης για την Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης στο οποίο η αναμενόμενη διείσδυση

$$\bar{I}(x,y) = \int_0^M p(z) I(x,y,z)\, dz$$

της Επιτιθέμενης καθίσταται ελάχιστη. Σε αντίθεση όμως με την γενική *1η Περίπτωση*, τούτη την φορά θα υποθέτουμε εξ αρχής ότι η πυκνότητα πιθανότητας $p(z)$ της στοχαστικής μεταβλητής z ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή ότι

$$p(z) = \frac{1}{M} .$$

Έτσι, οι δύο συνθήκες βελτιστοποίησης (112) και (113) γίνονται:

$$\frac{1}{M}\int_0^M \frac{\partial I(x,y,z)}{\partial x}\, dz \Bigg|_{x=x_*,\, y=y_*} = 0 \qquad (123)$$

και

$$\frac{1}{M}\int_0^M \frac{\partial I(x,y,z)}{\partial y}\, dz \Bigg|_{x=x_*,\, y=y_*} = 0 . \qquad (124)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την Σχέση (122) ως προς x και y, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της συνάρτησης I:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{1}{\xi^{-2}-1}\left(-1 + \frac{\xi^{-2}\, x}{\sqrt{x^2 + \left(\xi^{-2}-1\right)\left(x^2 + [y-z]^2\right)}}\right) \qquad (125)$$

και

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\xi(y-z)}{\sqrt{x^2+[y-z]^2}}. \qquad (126)$$

Αντικαθιστώντας την μερική παράγωγο που βρέθηκε στην *Σχέση* (126) μέσα στην (124), οδηγούμαστε στην *Εξίσωση*:

$$\int_0^M \frac{\xi(y-z)}{\sqrt{x^2+[y-z]^2}}\,dz\Bigg|_{x=x_*,\,y=y_*} = \int_0^M \frac{\xi(y_*-z)}{\sqrt{x_*^{\,2}+[y_*-z]^2}}\,dz = 0, \quad (127)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί με αλλαγή μεταβλητής. Πράγματι, εισάγοντας την νέα μεταβλητή $u := (y_*-z)^2$, η *Εξίσωση* (127) μετασχηματίζεται και γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$-\int_{y_*^{\,2}}^{(y_*-M)^2} \frac{du}{\sqrt{x_*^{\,2}+u}} = 0,$$

από την οποία προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα ότι:

$$\sqrt{x_*^{\,2}+u}\,\Bigg|_{u=y_*^{\,2}}^{u=(y_*-M)^2} = 0$$

δηλαδή ότι:

$$y_* = \frac{M}{2}. \qquad (128)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας την μερική παράγωγο που βρέθηκε στην *Σχέση* (125) μέσα στην *Εξίσωση* (123), και θέτοντας όπου y_* την τιμή $M/2$, λαμβάνουμε:

$$\int_0^M \left(-1 + \frac{\xi^{-2}x_*}{\sqrt{x_*^{\,2}+(\xi^{-2}-1)\left(\frac{M}{2}-z\right)}} \right) dz = 0,$$

ή ισοδυνάμως

$$x_* \xi^{-2} \int_0^M \frac{d\,z}{\sqrt{x_*^{\,2} + \left(\xi^{-2} - 1\right)\left(\frac{M}{2} - z\right)}} = M\,. \qquad (129)$$

Η τελευταία μπορεί να ολοκληρωθεί με αλλαγή μεταβλητής. Πράγματι, εισάγοντας την νέα μεταβλητή

$$\omega := \sqrt{\xi^{-2} - 1}\left(\frac{M}{2} - z\right),$$

η *Εξίσωση* (129) μετασχηματίζεται και γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$x_* \xi^{-2} \int_{\sqrt{\xi^{-2}-1}\,M/2}^{-\sqrt{\xi^{-2}-1}\,M/2} \frac{-d\,\omega}{\sqrt{\xi^2 - 1}\,\sqrt{\xi^{-2} x_*^{\,2} + \omega^2}} = M\,,$$

από την οποία προκύπτει αμέσως ότι:

$$\frac{x_* \xi^{-2}}{\sqrt{\xi^{-2} - 1}} \ln\left|\omega + \sqrt{\xi^{-2} x_*^{\,2} + \omega^2}\right| \Bigg|_{\omega = -\sqrt{\xi^{-2}-1}\,M/2}^{\omega = \sqrt{\xi^{-2}-1}\,M/2} = M$$

δηλαδή ότι:

$$\frac{x_* \xi^{-2}}{\sqrt{\xi^{-2} - 1}} \ln\left[\frac{\sqrt{\xi^{-2} - 1}\,\frac{M}{2} + \sqrt{\xi^{-2} x_*^{\,2} + \left(\xi^{-2} - 1\right)\frac{M^2}{4}}}{-\sqrt{\xi^{-2} - 1}\,\frac{M}{2} + \sqrt{\xi^{-2} x_*^{\,2} + \left(\xi^{-2} - 1\right)\frac{M^2}{4}}}\right] = M\,.$$

Ο τελευταίος *Τύπος* μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω και να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι:

$$\frac{x_* \xi^{-2}}{\sqrt{\xi^{-2} - 1}} \ln\left[\frac{\sqrt{\frac{\xi^{-2} x_*^{\,2}}{\xi^{-2} - 1} + \frac{M^2}{4}} + \frac{M}{2}}{\sqrt{\frac{\xi^{-2} x_*^{\,2}}{\xi^{-2} - 1} + \frac{M^2}{4}} - \frac{M}{2}}\right] = M\,. \qquad (130)$$

Η *Εξίσωση* (130) είναι μία υπερβατική εξίσωση η οποία μπορεί να επιλυθεί μόνον με Αριθμητικές Μεθόδους ως προς x_*.

Ωστόσο, κάτω από ιδιαίτερες υποθέσεις, η εύρεση της αναλυτικής λύσης είναι συχνά εφικτή. Για παράδειγμα, όταν

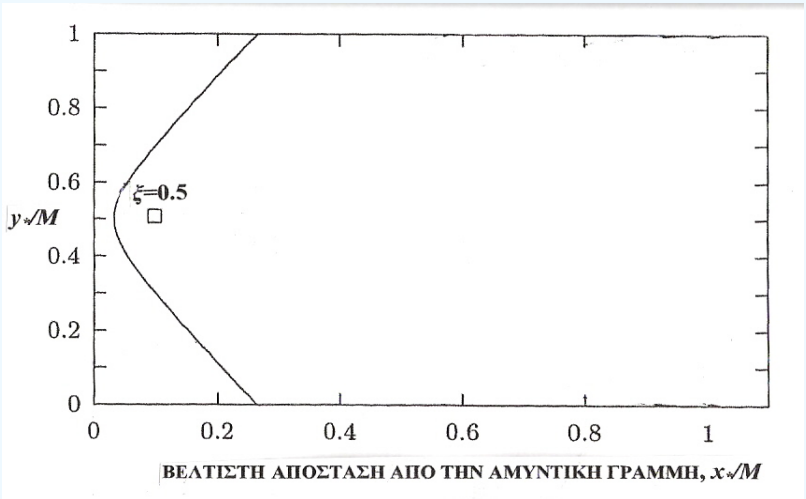
$$\xi = \frac{v_E}{v_A} = 0.5$$

η αναλυτική λύση της *Εξίσωσης* (130)είναι

$$x_* = 0.0994\,M\ .$$

Στο παρακάτω *Σχήμα 8*, αποδίδεται γραφικά η βέλτιστη θέση (x_*, y_*) εγκατάστασης για την Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης, καθώς επίσης και τα αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα, στην ειδική αυτή περίπτωση κατά την οποία

$$\xi = 0.5:$$



Σχήμα 8. *Βέλτιστες Θέσεις και αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα στην ειδική περίπτωση ξ*=0.5

8.8.Β.iii. Η Περίπτωση κατά την οποία η Ταχύτητα Μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι μεγαλύτερη από την Ταχύτητα Μετακίνησης της Αμυνόμενης

Εάν $v_E > v_A$, τότε υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέρη της *Εξίσωσης* (105) και θέτοντας εκ νέου

$$\xi = \frac{v_E}{v_A} \quad (>1),$$

λαμβάνουμε την *Εξίσωση*:

$$I^2 = (x-I)^2 \xi^2 + (y-z)^2 \xi^2 .$$

Η γενική λύση I αυτής δίνεται από τον *Τύπο*:

$$I = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - (1-\xi^{-2})(x^2 + [y-z]^2)}}{(1-\xi^{-2})} = \begin{cases} \dfrac{x - \sqrt{x^2 - (1-\xi^{-2})(x^2 + [y-z]^2)}}{(1-\xi^{-2})} \\ \text{ή} \\ \dfrac{x + \sqrt{x^2 - (1-\xi^{-2})(x^2 + [y-z]^2)}}{(1-\xi^{-2})} \end{cases} . \quad (131)$$

Η γενική λύση που προέκυψε περιλαμβάνει δύο κλάδους: ο πρώτος κλάδος αντιστοιχεί στην λύση με το θετικό πρόσημο $+$ στον αριθμητή της (131), ενώ ο δεύτερος κλάδος αντιστοιχεί στην λύση με το αρνητικό πρόσημο $-$ στον αριθμητή της (131). Προκειμένου να αποφασίσουμε ποιον από τους δύο αυτούς κλάδους της ανωτέρω γενικής λύσης πρέπει να επιλέξουμε, ας θεωρήσουμε την περίπτωση $z = y$, δηλαδή την ειδική περίπτωση κατά την οποία η προσπάθεια διείσδυσης της Επιτιθέμενης Πλευράς εκδηλώνεται από το σημείο $(0, y)$ του Κρίσιμου Διαστήματος της Αμυντικής Γραμμής το οποίο βρίσκεται στο ίδιο ακριβώς ύψος με το σημείο (x, y) επί του οποίου έχει εγκατασταθεί η Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης. Τότε, ο *Τύπος* (131) γίνεται:

$$I = I(x,y,z) = \frac{x\left(1 \pm \xi^{-1}\right)}{\left(1-\xi^{-2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{x\left(1-\xi^{-1}\right)}{\left(1+\xi^{-1}\right)\left(1-\xi^{-1}\right)} = \dfrac{x}{1+\xi^{-1}} \\ \text{ή} \\ \dfrac{x\left(1+\xi^{-1}\right)}{\left(1+\xi^{-1}\right)\left(1-\xi^{-1}\right)} = \dfrac{x}{1-\xi^{-1}} \end{cases} . \quad (132)$$

Από την άλλη μεριά, εάν συμβολίσουμε με

$$t$$

τον χρόνο που θα παρέλθει από την στιγμή που θα γίνει η προσπάθεια διείσδυσης της Επιτιθέμενης Πλευράς στο σημείο $(0,y)$ μέχρι την στιγμή που θα γίνει η πρώτη επαφή μεταξύ Αμυνόμενων και Επιτιθέμενων Οπλικών Μονάδων, τότε είναι σαφές πως θα ισχύουν οι εξής δύο *Σχέσεις*:

$$I = t\,v_E \text{ και } x - I = t\,v_A .$$

Απαλείφοντας το t από τις δύο αυτές *Εξισώσεις*, βλέπουμε πως, όταν η προσπάθεια διείσδυσης της Επιτιθέμενης Πλευράς εκδηλωθεί από το σημείο $(0,y)$ του Κρίσιμου Διαστήματος της Αμυντικής Γραμμής, η διείσδυση $I = I(x,y,z)$ της Επιτιθέμενης Πλευράς πίσω από την Αμυντική Γραμμή εντός της Αμυνόμενης Περιοχής, είναι:

$$I = I(x,y,z) = \frac{x\,\xi}{1+\xi} = \frac{x}{1+\xi^{-1}} . \quad (133)$$

Συγκρίνοντας τους δύο *Τύπους* (132) και (133), καταλαβαίνουμε ότι, στην περίπτωση που η προσπάθεια διείσδυσης της Επιτιθέμενης Πλευράς εκδηλωθεί από το σημείο $(0,z) = (0,y)$ του Κρίσιμου Διαστήματος της Αμυντικής Γραμμής, πρέπει να επιλέξουμε εκείνο τον κλάδο της γενικής λύσης (131) ο οποίος αντιστοιχεί στο αρνητικό πρόσημο $-$ στον αριθμητή της (131). Με δεδομένο ότι η επιλογή του κλάδου πρέπει να γίνει ανεξαρτήτως του σημείου από το οποίο θα εκδηλωθεί η προσπάθεια διείσδυσης της Επιτιθέμενης Πλευράς, αποφασίζουμε να επιλέξουμε τελικά μόνον την λύση:

$$I = \frac{x - \sqrt{x^2 - \left(1-\xi^{-2}\right)\left(x^2 + \left[y-z\right]^2\right)}}{\left(1-\xi^{-2}\right)}. \qquad (134)$$

Όπως και στην *1η Περίπτωση* της *Υποπαραγράφου 8.8.Β.i*, οι *Εξισώσεις* (112) και (113) μπορούν και πάλι να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να προσδιορισθεί το βέλτιστο σημείο (x_*, y_*) εγκατάστασης για την Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης στο οποίο η αναμενόμενη διείσδυση

$$\bar{I}(x,y) = \int_0^M p(z) I(x,y,z)\, dz$$

της Επιτιθέμενης καθίσταται ελάχιστη. Σε αντίθεση όμως με την γενική παρουσίαση της *1ης Περίπτωσης*, τούτη την φορά (όπως στην *2η Περίπτωση*) θα υποθέτουμε εξ αρχής ότι η πυκνότητα πιθανότητας $p(z)$ της στοχαστικής μεταβλητής z ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή ότι

$$p(z) = \frac{1}{M}.$$

Έτσι, οι δύο συνθήκες βελτιστοποίησης (112) και (113) γίνονται:

$$\frac{1}{M}\int_0^M \frac{\partial I(x,y,z)}{\partial x} dz \Bigg|_{x=x_*, y=y_*} = 0 \qquad (135)$$

και

$$\frac{1}{M}\int_0^M \frac{\partial I(x,y,z)}{\partial y} dz \Bigg|_{x=x_*, y=y_*} = 0. \qquad (136)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την Σχέση (134) ως προς x και y, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της συνάρτησης I:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{1}{1-\xi^{-2}}\left(1 - \frac{x\,\xi^{-2}}{\sqrt{\xi^{-2}x^2 - \left(1-\xi^{-2}\right)(y-z)^2}}\right) \qquad (137)$$

και

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{(y-z)}{\sqrt{x^2 - \left(1-\xi^{-2}\right)\left(x^2 + \left[y-z\right]^2\right)}}. \qquad (138)$$

Αντικαθιστώντας την μερική παράγωγο που βρέθηκε στην *Σχέση* (138) μέσα στην (136), οδηγούμαστε στην *Εξίσωση*:

$$\int_0^M \frac{(y-z)}{\sqrt{x^2-(1-\xi^{-2})(x^2+[y-z]^2)}}\,dz\Bigg|_{x=x_*,\,y=y_*}$$

$$=\int_0^M \frac{(y_*-z)}{\sqrt{x_*^{\,2}-(1-\xi^{-2})(x_*^{\,2}+[y_*-z]^2)}}\,dz=0\,, \qquad (139)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί με αλλαγή μεταβλητής. Πράγματι, εισάγοντας την νέα μεταβλητή $u:=(y_*-z)^2$, η *Εξίσωση* (139) μετασχηματίζεται και γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$\int_{y_*^{\,2}}^{(y_*-M)^2} \frac{du}{\sqrt{x_*^{\,2}-(1-\xi^{-2})(x_*^{\,2}+u)}}=0\,,$$

από την οποία προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα ότι:

$$\sqrt{\xi^{-2}x_*^{\,2}+u}\,\Bigg|_{u=y_*^{\,2}}^{u=(y_*-M)^2}=0$$

δηλαδή ότι:

$$y_*=\frac{M}{2}. \qquad (140)$$

Ομοίως, αντικαθιστώντας την μερική παράγωγο που βρέθηκε στην *Σχέση* (137) μέσα στην *Εξίσωση* (134), και θέτοντας όπου y_* την τιμή $M/2$, λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{(1-\xi^{-2})}\int_0^M\left(1-\frac{x_*\xi^{-2}}{\sqrt{x_*^{\,2}\xi^{-2}-(1-\xi^{-2})\left(\frac{M}{2}-z\right)^2}}\right)dz=0\,,$$

ή ισοδυνάμως

$$x_* \xi^{-2} \int_0^M \frac{d\,z}{\sqrt{x_*^{\,2}\xi^{-2} - \left(1-\xi^{-2}\right)\left(\frac{M}{2}-z\right)^2}} = M\ ,$$

δηλαδή

$$\frac{x_*\xi^{-2}}{\sqrt{1-\xi^{-2}}} \int_0^M \frac{d\,z}{\sqrt{\frac{x_*^{\,2}\xi^{-2}}{\xi^{-2}-1} - \left(\frac{M}{2}-z\right)^2}} = M\ . \qquad (141)$$

Η τελευταία μπορεί να ολοκληρωθεί με αλλαγή μεταβλητής. Πράγματι, εισάγοντας την νέα μεταβλητή

$$\upsilon := \left(\frac{M}{2}-z\right),$$

η *Εξίσωση* (141) μετασχηματίζεται και γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$\frac{x_*\xi^{-2}}{\sqrt{1-\xi^{-2}}} \int_{-M/2}^{M/2} \frac{d\,\upsilon}{\sqrt{\frac{x_*^{\,2}\xi^{-2}}{\xi^{-2}-1} - \upsilon^2}} = M\ ,$$

από την οποία προκύπτει αμέσως ότι:

$$\frac{x_*\,\xi^{-2}}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}\, Arc\tan\left(\frac{\upsilon}{\left[x_*\xi^{-1}\right]\Big/\sqrt{1-\xi^2}}\right)\Bigg|_{\upsilon=-M/2}^{\upsilon=M/2} = M$$

δηλαδή ότι:

$$\frac{2\,x_*\xi^{-2}}{\sqrt{1-\xi^{-2}}}\, Arc\tan\left(\frac{\sqrt{\xi^2-1}\,M}{2\,x_*}\right) = M\ .$$

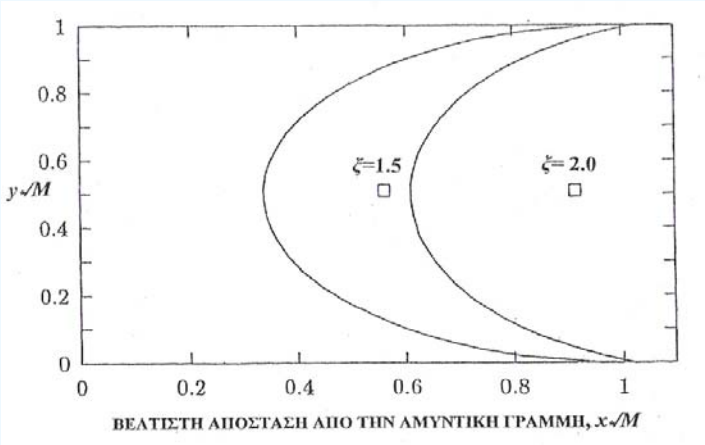
Ο τελευταίος *Τύπος* μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω και να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι:

$$Arc\tan\left(\sqrt{\xi^2-1}\,\frac{M}{2\,x_*}\right) = \xi\sqrt{\xi^2-1}\,\frac{M}{2\,x_*}\ . \qquad (142)$$

Η *Εξίσωση* (142) είναι μία υπερβατική εξίσωση η οποία μπορεί να επιλυθεί μόνον με Αριθμητικές Μεθόδους ως προς x_*.

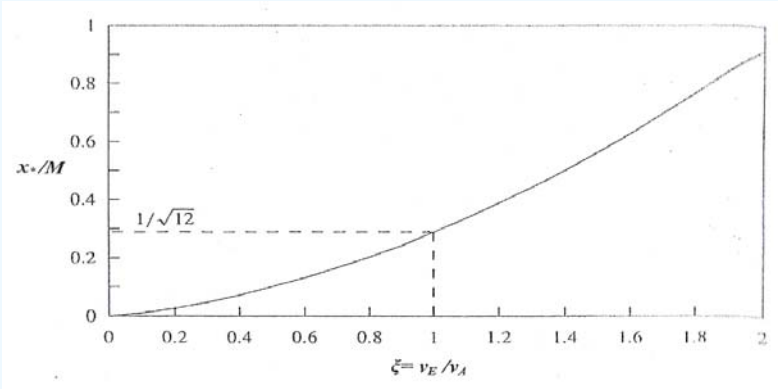
Στο παρακάτω *Σχήμα 9*, αποδίδονται γραφικά οι βέλτιστες θέσεις (x_*, y_*) εγκατάστασης για την Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης, καθώς επίσης και τα αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα, στις ειδικές περιπτώσεις

$$\xi = 1.5 \text{ και } 2.0:$$



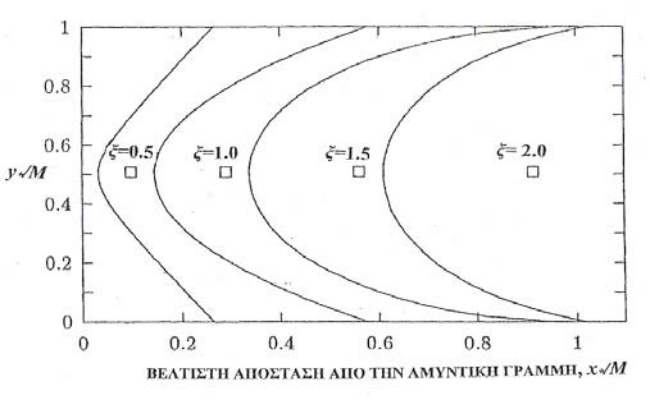
Σχήμα 9.*Βέλτιστες Θέσεις και αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα στις ειδικές περιπτώσεις ξ*=1.5 *και* 2.0

Η συμπεριφορά του πηλίκου x_*/M συναρτήσει της μεταβλητής $\xi = v_E/v_A$ αποδίδεται κατωτέρω στο *Σχήμα 10*.



Σχήμα 10. *Συμπεριφορά του πηλίκου x*/M συναρτήσει της μεταβλητής ξ= v_E /v_A*

Όπως μπορούμε να συμπεράνουμε, παρατηρώντας το *Σχήμα 10*, ***όσο η τιμή της μεταβλητής*** ξ ***αυξάνεται, τόσο η θέση*** (x_*, y_*) ***εγκατάστασης της Στρατιωτικής Βάσης απομακρύνεται από την Γραμμή του Αμυντικού Μετώπου.*** Προς επιβεβαίωση του συμπεράσματος αυτού, παραθέτουμε αμέσως παρακάτω σε ένα μόνον *Σχήμα* τις γραφικές παραστάσεις των *Σχημάτων 7, 8* και *9*. Από την σύγκριση των γραφικών αποδόσεων των βέλτιστων θέσεων (x_*, y_*) εγκατάστασης για την Στρατιωτική Βάση της Αμυνόμενης, καθώς επίσης και των αντίστοιχων Αμυντικών Τόξων, στις τέσσερις ειδικές περιπτώσεις $\xi = 0.5, 1.0, 1.5$ και 2.0, επιβεβαιώνεται και πάλι το ανωτέρω συμπέρασμα:



Σχήμα 11. *Βέλτιστες Θέσεις και αντίστοιχα Αμυντικά Τόξα στις τέσσερις ειδικές περιπτώσεις* ξ=0.5, 1.0, 1.5 *και* 2.0

8.8.Γ. Βέλτιστη Τοποθέτηση των Αμυντικών Δυνάμεων σε Μετακινούμενη Άμυνα όταν ο Αντίπαλος επιχειρεί να διεισδύσει από διαφορετικά Σημεία της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου

Στις προηγούμενες *Παραγράφους*, αναζητήθηκε ένα βέλτιστο σημείο για την αρχική τοποθέτηση όλων των διαθέσιμων Αμυνόμενων Οπλικών Μονάδων σε μία Μετακινούμενη

Άμυνα όταν ο Αντίπαλος επιχειρήσει να διεισδύσει από ένα και μόνον σημείο του Διαστήματος της Κρίσιμής Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου.

Όμως, συχνά, είναι δυνατόν, για στρατηγικούς λόγους, η Επιτιθέμενη Πλευρά να επιχειρήσει να διεισδύσει από n διαφορετικά σημεία του Διαστήματος μήκους M της Κρίσιμης Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου. Τότε, η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει να οργανώσει την Μετακινούμενη Άμυνά της αναζητώντας $n-$άδες βέλτιστων σημείων για την αρχική τοποθέτηση των

$$X_1 := \sum_{j=1}^{M_1} X_1^{(j)} = X_1^{(1)} + X_1^{(2)} + \ldots + X_1^{(M_1)}$$

διαθέσιμων Αμυνόμενων Οπλικών της Μονάδων.

Φυσικά, τα ακριβή σημεία $(0, z_1)$, $(0, z_2)$,…, $(0, z_n)$ της Αμυντικής Γραμμής από τα οποία θα επιχειρηθεί η διείσδυση της Επιτιθέμενης Δύναμης δεν μπορεί να είναι εκ των προτέρων γνωστά. Επομένως η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει να υπολογίσει τα σημεία αυτά μόνον κατ' εκτίμηση.

Για τον σκοπό αυτό, μπορούμε να θεωρήσουμε μία διαμέριση του Διαστήματος μήκους M της Κρίσιμης Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου σε n Υποδιαστήματα και να αξιώσουμε την ύπαρξη n (διακριτών ή συνεχών) συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας $p(z_1)$, $p(z_2)$,…, $p(z_n)$ οι οποίες μπορούν να ορισθούν λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως είναι

η εκτίμηση που έχει η Αμυνόμενη Πλευρά στην στρατηγική αξία η οποία αποδίδεται από την Επιτιθέμενη στους Στόχους εντός της Αμυνόμενης Περιοχής

καθώς και

η τοπογραφική διαμόρφωση του εδάφους στα σημεία του Κρίσιμου Διαστήματος επί της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου η οποία μπορεί να επιτρέψει την ευκολότερη διείσδυση της Επιτιθέμενης μέσω του σημείου αυτού.

Προφανώς πρέπει να ισχύουν οι εξής προφανείς *Σχέσεις*:

$$\int_0^{M_1} p(z_1)\,dz_1 = \int_{M_1}^{M_2} p(z_2)\,dz_2 = \cdots = \int_{M_{n-1}}^{M_n} p(z_n)\,dz_n = 1 \ .$$

Στην ***πρώτη*** και ***απλούστερη*** αυτών των περιπτώσεων, δηλαδή της διείσδυσης της Επιτιθέμενης από 2(δύο) διαφορετικά σημεία, η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει

1. να διαιρέσει το Διάστημα μήκους M της Κρίσιμης Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου σε δύο ίσα Υποδιαστήματα (το ***Κάτω Υποδιάστημα*** $[0, M_1]$ και το ***Άνω Υποδιάστημα*** $[M_1, M_2]$) έκαστο μήκους $M/2$, και
2. να αντιστοιχίσει σε κάθε ένα Υποδιάστημα το ήμισυ $X_1/2$ του πλήθους των Αμυνόμενων Οπλικών της Μονάδων.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, το *σ-μ Θεώρημα του Gupta* (*Πρόταση VIII.21*) εγγυάται ότι

VIII.23. Πρόταση. ***Εάν η ταχύτητα μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την ταχύτητα μετακίνησης της Αμυνόμενης Δύναμης, τότε ο Στρατιωτικός Διοικητής της Αμυνόμενης Πλευράς θα έχει την δυνατότητα να ελαχιστοποιήσει μέσα στο έδαφος που υπερασπίζεται την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης Πλευράς πίσω από την Αμυντική Γραμμή, προλαβαίνοντας να στείλει κάθε μία Οπλική του Μονάδα πάνω σε μία Οπλική Μονάδα του Εισβολέα εφόσον προηγουμένως καταφέρει να συγκεντρώσει το ήμισυ*** $X_1/2$ ***του πλήθους των Οπλικών του Μονάδων στο σημείο***

$$(\sigma_1, \mu_1)$$

και τις υπόλοιπες $X_1/2$ ***Οπλικές του Μονάδες στο σημείο***

$$(\sigma_2, \mu_2).$$

Το σύμβολο μ_1 *αναπαριστά το σημείο επί του Κάτω Υποδιαστήματος μήκους* $M/2$ *της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά* ***αναμένεται*** *να επιτεθεί εναντίον της Αμυνόμενης, ενώ το σύμβολο* σ_1 *αναπαριστά την τυπική απόκλιση της κατανομής του εν λόγω σημείου*. Ομοίως, *το σύμβολο* μ_2 *αναπαριστά το σημείο επί του Άνω Υποδιαστήματος μήκους* $M/2$ *της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά* ***αναμένεται*** *να επιτεθεί εναντίον της Αμυνόμενης, ενώ το σύμβολο* σ_2 *αναπαριστά την τυπική απόκλιση της κατανομής του εν λόγω σημείου*. ■

Ιδιαιτέρως, έχουμε το ακόλουθο κομψό αποτέλεσμα:

VIII.24. Πόρισμα. Στην περίπτωση που οι δύο στοχαστικές μεταβλητές z_1, z_2 ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας, *εάν*, δηλαδή,

$$p(z_1) = p(z_2) = \frac{1}{M/2}\left(= \frac{2}{M}\right),$$

και, εφόσον η ταχύτητα μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την ταχύτητα μετακίνησης της Αμυνόμενης Δύναμης, τότε

(i). Ο Στρατιωτικός Διοικητής της Αμυνόμενης Πλευράς θα έχει την δυνατότητα να ελαχιστοποιήσει τόσο την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης πίσω από το Κάτω Υποδιάστημα της Αμυντικής Γραμμής, εάν προηγουμένως συγκεντρώσει τις $X_1/2$ Οπλικές του Μονάδες στο σημείο

$$(\sigma_1, \mu_1) = \left(\frac{M}{2\sqrt{12}}, \frac{M}{4}\right) \qquad (143)$$

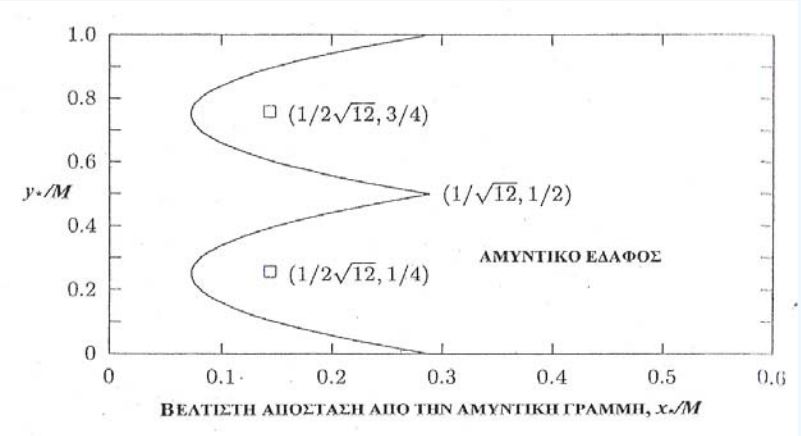
όσο και την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης πίσω από το Άνω Υποδιάστημα της Αμυντικής Γραμμής, εάν προηγουμένως συγκεντρώσει τις υπόλοιπες $X_1/2$ Οπλικές του Μονάδες στο σημείο

$$(\sigma_2, \mu_2) = \left(\frac{M}{2\sqrt{12}}, \frac{3M}{4}\right). \qquad (144)$$

(ii). Επί πλέον, κάτω από τις ίδιες ως άνω υποθέσεις, έχουμε τις ακόλουθες Σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των διεισδύσεων I_1 και I_2 της Επιτιθέμενης Πλευράς και των υψών z_1 και z_2 των σημείων της Αμυντικής Γραμμής διά μέσου των οποίων η Επιτιθέμενη Πλευρά θα επιχειρήσει την διείσδυσή της στο έδαφος της Αμυνόμενης:

$$I_1 = \frac{\frac{M^2}{24} + \left(\frac{M}{4} - z_1\right)^2}{\frac{M}{\sqrt{12}}} \text{ και } I_2 = \frac{\frac{M^2}{24} + \left(\frac{3M}{4} - z_2\right)^2}{\frac{M}{\sqrt{12}}}. \blacksquare \qquad (145)$$

Η ειδική περίπτωση του *Πορίσματος VIII.24* αποδίδεται γραφικά στο ακόλουθο *Σχήμα* :



Σχήμα 12. *Αρχικές Θέσεις Αμυνόμενων και Επιτιθέμενων Οπλικών Μονάδων*

VIII.25. Παρατήρηση. Σχολιάζοντας τα ανωτέρω αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον *Τύπο* (145), στην περίπτωση του *Πορίσματος VIII.24* η τοποθέτηση των Αμυνόμενων Δυνάμεων στα σημεία (σ_1, μ_1) και (σ_2, μ_2) των *Σχέσεων* (143) και (144) περιορίζει την αναμενόμενη μέγιστη επιθετική διείσδυση διαιρώντας την με ένα μήκος της τάξης των

$$M/\sqrt{12} = 0.2887M$$

μετρικών μονάδων, σε αντίθεση με την περίπτωση του *Πορίσματος VIII.22* που η τοποθέτηση των Αμυνόμενων Δυνάμεων στο σημείο (σ, μ) της *Σχέσης* (120) περιορίζει την αναμενόμενη μέγιστη επιθετική διείσδυση διαιρώντας την με ένα διπλάσιο μήκος της τάξης των

$$2M/\sqrt{12} = 0.5773M$$

μετρικών μονάδων. Η παρατηρούμενη αύξηση της τάξης του 50% στην τιμή της αναμενόμενης διείσδυσης οφείλεται στο γεγονός ότι, στην περίπτωση του *Πορίσματος VIII.24*, η συγκέντρωση της Αμυνόμενης Πλευράς στα σημεία (σ_1, μ_1) και (σ_2, μ_2) υποδιπλασιάζεται. ■

Στην ***δεύτερη απλούστερη*** αυτών των περιπτώσεων, δηλαδή της διείσδυσης της Επιτιθέμενης από 2 (δύο) διαφορετικά σημεία, η Αμυνόμενη Πλευρά θα πρέπει

1. να διαιρέσει το Διάστημα μήκους M της Κρίσιμης Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου σε δύο Υποδιαστήματα, έτσι ώστε το μεν ***Κάτω Υποδιάστημα*** $[0, M_1]$ να έχει μήκος ίσο με $M/3$, το δε ***Άνω Υποδιάστημα*** $[M_1, M_2]$) να έχει μήκος ίσο με $2M/3$, και
2. να αντιστοιχίσει σε κάθε ένα Υποδιάστημα το ήμισυ $X_1/2$ του πλήθους των Αμυνόμενων Οπλικών της Μονάδων.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, το *σ-μ Θεώρημα του Gupta* (*Πρόταση VIII.21*) εγγυάται ότι

VIII.26. Πρόταση. ***Εάν η ταχύτητα μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την ταχύτητα μετακίνησης της Αμυνόμενης Δύναμης, τότε ο Στρατιωτικός Διοικητής της Αμυνόμενης Πλευράς θα έχει την δυνατότητα να ελαχιστοποιήσει μέσα στο έδαφος που υπερασπίζεται την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης Πλευράς πίσω από την Αμυντική Γραμμή, προλαβαίνοντας να στείλει κάθε μία Οπλική του Μονάδα πάνω σε μία Οπλική Μονάδα του Εισβολέα εφόσον προηγουμένως καταφέρει να συγκεντρώσει το ήμισυ*** $X_1/2$ ***του πλήθους των Οπλικών του Μονάδων στο σημείο***

$$(\sigma_1, \mu_1)$$

και τις υπόλοιπες $X_1/2$ ***Οπλικές του Μονάδες στο σημείο***

$$(\sigma_2, \mu_2).$$

Το σύμβολο μ_1 *αναπαριστά το σημείο επί του Κάτω Υποδιαστήματος μήκους* $M/3$ *της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά* ***αναμένεται*** *να*

επιτεθεί εναντίον της Αμυνόμενης, ενώ το σύμβολο σ_1 *αναπαριστά την τυπική απόκλιση της κατανομής του εν λόγω σημείου.* Ομοίως, *το σύμβολο* μ_2 *αναπαριστά το σημείο επί του Άνω Υποδιαστήματος μήκους* $2M/3$ *της Γραμμής του Αμυντικού Μετώπου διά μέσου του οποίου η Επιτιθέμενη Πλευρά* ***αναμένεται*** *να επιτεθεί εναντίον της Αμυνόμενης, ενώ το σύμβολο* σ_2 *αναπαριστά την τυπική απόκλιση της κατανομής του εν λόγω σημείου.* ■

Ιδιαιτέρως,:

VIII.27. Πόρισμα. Στην περίπτωση που οι δύο στοχαστικές μεταβλητές z_1, z_2 **ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας, *εάν*, δηλαδή,**

$$p(z_1)=\frac{1}{M/3}\left(=\frac{3}{M}\right) \text{ και } p(z_2)=\frac{1}{2M/3}\left(=\frac{3}{2M}\right)$$

και, εφόσον η ταχύτητα μετακίνησης της Επιτιθέμενης Δύναμης είναι ίση με την ταχύτητα μετακίνησης της Αμυνόμενης Δύναμης, τότε

(i). ***Ο Στρατιωτικός Διοικητής της Αμυνόμενης Πλευράς θα έχει την δυνατότητα να ελαχιστοποιήσει τόσο την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης πίσω από το Κάτω Υποδιάστημα της Αμυντικής Γραμμής, εάν προηγουμένως συγκεντρώσει τις*** $X_1/2$ ***Οπλικές του Μονάδες στο σημείο***

$$(\sigma_1,\mu_1)=\left(\frac{2M}{3\sqrt{12}},\frac{M}{3}\right) \qquad (146)$$

όσο και την αναμενόμενη διείσδυση της Επιτιθέμενης πίσω από το Άνω Υποδιάστημα της Αμυντικής Γραμμής, εάν προηγουμένως συγκεντρώσει τις υπόλοιπες $X_1/2$ ***Οπλικές του Μονάδες στο σημείο***

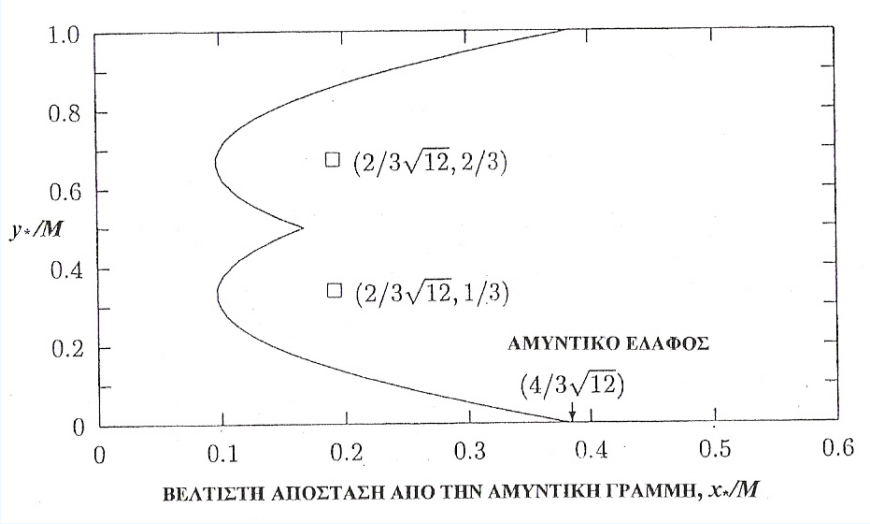
$$(\sigma_2,\mu_2)=\left(\frac{2M}{3\sqrt{12}},\frac{2M}{3}\right). \qquad (147)$$

(ii). ***Επί πλέον, κάτω από τις ίδιες ως άνω υποθέσεις, έχουμε τις ακόλουθες Σχέσεις που***

υφίστανται μεταξύ των διεισδύσεων I_1 ***και*** I_2 ***της Επιτιθέμενης Πλευράς και των υψών*** z_1 ***και*** z_2 ***των σημείων της Αμυντικής Γραμμής διά μέσου των οποίων η Επιτιθέμενη Πλευρά θα επιχειρήσει την διείσδυσή της στο έδαφος της Αμυνόμενης:***

$$I_1 = \frac{\frac{M^2}{27} + \left(\frac{M}{3} - z_1\right)^2}{\frac{4M}{3\sqrt{12}}} \text{ και } I_2 = \frac{\frac{M^2}{27} + \left(\frac{2M}{3} - z_2\right)^2}{\frac{4M}{3\sqrt{12}}} . \qquad (148)$$

Η ειδική περίπτωση του *Πορίσματος VIII.27* αποδίδεται γραφικά στο ακόλουθο *Σχήμα* :



Σχήμα 13. *Αρχικές Θέσεις Αμυνόμενων και Επιτιθέμενων Οπλικών Μονάδων*

VIII.28. Παρατήρηση. Σχολιάζοντας τα ανωτέρω αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον *Τύπο* (148), στην περίπτωση του *Πορίσματος VIII.27* η αναμενόμενη μέγιστη επιθετική διείσδυση διαιρείται με ένα μήκος της τάξης των

$$4M/3\sqrt{12} = 0.3849M \text{ μετρικών μονάδων,}$$

σε αντίθεση με την περίπτωση του *Πορίσματος VIII.22* που η τοποθέτηση των Αμυνόμενων Δυνάμεων στο σημείο (σ, μ) της *Σχέσης* (120) περιορίζει την αναμενόμενη μέγιστη επιθετική διείσδυση διαιρώντας την με ένα μήκος της τάξης των

$$2M/\sqrt{12} = 0.5773M \text{ μετρικών μονάδων. } \blacksquare$$

Βιβλιογραφία

[Anderson, 1985] ANDERSON, L. B.: "Antipotential Potential" Rept. N – 845, Institute for Defense Analyses (IDA Arlington, VA 22202), April 1979

[Δάρας, 2001/I] ΔΑΡΑΣ, Ν. ΙΩ.: "Διαφορικές Εξισώσεις και Μαθηματικές Θεωρίες Πολέμου", *Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων*, *Βάρη*, 2001, Τόμος I, 2001, (σελ. 503),

[Δάρας, 2001/II] ΔΑΡΑΣ, Ν. ΙΩ.: "Διαφορικές Εξισώσεις και Μαθηματικές Θεωρίες Πολέμου", *Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων*, *Βάρη*, 2001, Τόμος II, (σελ. 302)

[Δάρας, 2007] ΔΑΡΑΣ, Ν. Ιω.: "Εισαγωγή στις Στοχαστικές και Ανανεωτικές Θεωρίες Πολέμου ", *Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων*, *Βάρη*, 2007, Τόμος 1ος, Βιβλίο 1ο (σελ. 232)

[Δάρας, 2007] ΔΑΡΑΣ, Ν. Ιω.: "Εισαγωγή στις Στοχαστικές και Ανανεωτικές Θεωρίες Πολέμου ", *Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων*, *Βάρη*, 2007, Τόμος 1ος, Βιβλίο 2ο (σελ. 247)

[Dare, James, 1971] DARE, D. P. and JAMES, B. A. P.: "The Derivation of Some Parameters for a Corps/Division Model from a Battle Group Model", Paper-M-7120, Defense Operational Analysis Establishment, Ministry of Defense, West Byfleet, United Kingdom (England), July 1971

[Gupta, 1993] GUPTA, R.: *Defense Positioning and Geometry*, The Brookings Inst., Washington, DC, 1993

[Holter, 1973] HOLTER, W. H.: "A Method for Determining Individual and Combined Effectiveness Measures Utilizing the Results of a High-Resolustion Combat Simulation Model", *Proceedings of the Twelfth Annual U. A. Army Operations Research Symposium*, Durham, NC, 1973, pp. 182-196

[Howes Thrall, 1973] HOWES, D. R. and THRALL, R. M.. "A Theory of Ideal Linear Weights for Heterogeneous Combat Forces", Thrall and Associates Rept. to U.S. Army Strategy

and Tactics Analysis Group (STAG), Houston, TX, AD 759 279, May 1972, pp.27-47; also in *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 20, Dec. 1973, pp. 654-659

[Luenberger, 1979] LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems*, Wiley, New York, 1979, pp. 83, 84, 185, 193

[Przemieniecki, 1988] PRZEMIENIECKI, J. S.: "Mathematical Modeling of Combat Engagements of Heterogeneous Forces", Air Force Inst. of Technology, Rept. AFIT/TR-EN-88-OV2, AD A213 274, Sept. 1988

[Przemieniecki, 1993] PRZEMIENIECKI, J. S.: "Defense Analyses Software", 2nd Edition, *Education Series*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (*AIAA*), Washington, DC, 1993

[Przemieniecki, 2000] PRZEMIENIECKI, J.S.: "Mathematical Methods in Defense Analyses", Third Edition, *Education Series*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics* (*AIAA*), Inc., Reston, VA 20191-4344, 2000, σελ. 398

[Spudich, 1985] SPUDICH, J. : "The Relative Kill Productivity Exchange Ratio Technique", Booze-Allen Applied Research, Inc., Combined Arms Research Office, Fort Leavenworth, KS ; also in Table E of Appendix II to Annex L, "Cost-Effectiveness Evaluation to Tank, AntiTnk Assault Weapons Requirements Study, Phase III (TATAWS II)", U. S. Army Combat Development Command, Fort Belvoir, VA, AD 500 635, Dec. 1968

[Taylor, 1983/II] TAYLOR, J. G.: *Lanchester Models of Warfare,* Vol. 2, Military Applications Section, ORSA, 1983