ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΙΩ. ΔΑΡΑ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΤΟΜΟΣ 1ος

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΕΛΕΓΧΟΥ ΟΠΛΩΝ

www.armscontrol.info

-2007-

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

Πρόλογος **7**

Κεφάλαιο Ι

Άλγεβρα Πινάκων **11**

Ι.1. Βασικοί Ορισμοί 11

Ι.Ι.1. Ο Διανυσματικός Χώρος C^n 11

Ι.Ι.2. Γραμμικές Απεικονίσεις 13

Ι.Ι.3. Πίνακες 14

Ι.2. Πράξεις Μεταξύ Πινάκων 17

Ι.2.1. Πρόσθεση 18

Ι.2.2. Αριθμητικός Πολλαπλασιασμός 20

Ι.2.3. Γινόμενο δύο Πινάκων 22

Ι.2.4. Ειδικές Περιπτώσεις Γινομένων 24

Ι.2.5. Πίνακες που προκύπτουν από δοθέντα 27

Ι.3. Αντιστροφή Πινάκων 29

Ι.3.1. Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων 29

Ι.3.2. Βάσεις και Διάσταση 30

Ι.3.3. Ευκλείδειοι Χώροι και Ορθογώνια Διανύσματα 33

Ι.3.4. Ορθογωνοποίηση Schmidt 40

Ι.3.5. Αντιστροφή Γραμμικής Απεικόνισης 43

Ι.3.6. Αντίστροφος Πίνακας 47

Ι.3.7. Αλλαγή Βάσης 50

Ι.4. Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων 54

Ι.4.1. Ορίζουσες 54

Ι.4.2. Συστήματα Cramer 55

I.5. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα 58
I.5.1. Ορισμοί 58
I.5.2. Ιδιότητες 61
I.5.3. Η Μορφή Jordan 68
I.5.4. Το Θεώρημα Schur 69
I.5.5. Εντοπισμός των Ιδιοτιμών 74
I.6. Διάσπαση Πίνακα 79
I.6.1. Διάσπαση Gauss 79
I.6.2. Διάσπαση Cholesky 81
I.6.3. Διάσπαση Householder 83

Κεφάλαιο ΙΙ
Αριθμητικός Υπολογισμός Ιδιοτιμών **85**

ΙΙ.1. Η Μέθοδος των Δυνάμεων 85
ΙΙ.1.1. Επιτάχυνση της Σύγκλισης 90
ΙΙ.1.2. Παραλλαγές της Μεθόδου των Δυνάμεων 92
ΙΙ.1.2.(i). Η Μέθοδος των Ιχνών 92
ΙΙ.1.2.(ii). Η Μέθοδος του Εσωτερικού Γινομένου 93
ΙΙ.1.3. Αναζήτηση των άλλων Ιδιοτιμών 94
ΙΙ.1.3.(i). Η Μέθοδος της $\lambda-$Διαφοράς 95
ΙΙ.1.3.(ii). Η Μέθοδος της Ύφεσης 95
ΙΙ.2. Μέθοδοι Άμεσου Προσδιορισμού του Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου 98
ΙΙ.2.1. Η Μέθοδος Souriau 99
ΙΙ.3. Η Μορφή Hessenberg 101
ΙΙ.3.1. Η Μέθοδος Givens 103
ΙΙ.3.2. Η Μέθοδος Householder 106
ΙΙ.4. Οι Μέθοδοι Αναγωγής σε Τριδιαγώνια Μορφή 108
ΙΙ.4.1. Η Μέθοδος Lanczos 115

II.4.2. Οι Μέθοδοι Givens και Householder 123
II.5. Οι Μέθοδοι Διάσπασης 124
II.5.1. Η Μέθοδος Jacobi 127
II.5.2. Η Μέθοδος Greenstadt 135
II.5.3. Ο Αλγόριθμος LR 138
II.5.4. Ο Αλγόριθμος QR 148
Κεφάλαιο III
Αριθμητική Επίλυση Αλγεβρικών Εξισώσεων και Συστημάτων Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων **152**
III.1. Αριθμητική Λύση Εξισώσεων 152
III.1.1. Γενικά 152
III.1.2. Επαναληπτικές Μέθοδοι για Εξισώσεις μίας Μεταβλητής 170
III.1.2.(i). Η Μέθοδος Newton 171
III.1.2.(ii). Οι Μέθοδοι της Τέμνουσας και της Διχοτόμησης 176
III.1.2.(iii).Οι Μέθοδοι Δ^2 του Aitken και του Steffensen 185
III.1.2.(iv).Οι Μέθοδοι Ανώτερης Τάξης Σύγκλισης 194
III.1.3. Επαναληπτικές Μέθοδοι για Εξισώσεις Πολλών Μεταβλητών 196
III.1.3.(i). Η Μέθοδος Newton 196
III.1.3.(ii). Η Μέθοδος Henrici 199
III.1.4. Υπολογισμός των Ριζών ενός Πολυωνύμου 202
III.1.4.(i). Η Μέθοδος Newton 206
III.1.4.(ii). Η Μέθοδος Lin 208
III.1.4.(iii).Η Μέθοδος Bernoulli 209
III.1.4.(iv).Η Μέθοδος Bairstow 212
III.1.4.(v).Η Μέθοδος Hörner 216
III.2. Έννοιες Σύγκλισης 217
III.2.1. Διανυσματικοί Χώροι με Νόρμα 217

III.2.2. Ανισότητες Hölder 237
III.2.3. Γεωμετρικές Νόρμες Πινάκων 240
III.2.4. Νόρμες Τετραγωνικών Πινάκων 242
III.2.5. Φράγματα για την Φασματική Ακτίνα 246
III.2.6. Σύγκλιση Πινάκων 247
III.3. Οι Άμεσες Μέθοδοι Επίλυσης Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων 249
III.3.1. Οι Μέθοδοι Gauss και Cholesky 251
III.3.2. Η Μέθοδος Householder 256
III.4. Οι Επαναληπτικές Μέθοδοι Επίλυσης Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων 266
III.4.1. Γενικά 266
III.4.2. Πίνακες Παράγοντες και Κυκλικοί 268
III.4.3. Μέθοδοι Χαλάρωσης 270
III.4.4. Διάσπαση Πίνακα 275
III.4.5. Η Μέθοδος Jacobi 276
III.4.6. Η Μέθοδος Gauss-Seidel 277
III.4.7. Σύγκλιση των Μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel 278
III.4.8. Η Μέθοδος Υπερχαλάρωσης 283
III.4.9. Η Θεωρία Young-Frankel 287
III.4.10. Γενικεύσεις 309
III.5. Οι Μέθοδοι Προβολής για την Επίλυση Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων 344
III.5.1. Γενικά 344
III.5.2. Μέθοδοι Προβολής για Συμμετρικά Συστήματα 350
III.5.3. Γεωμετρική Κατασκευή της Διαδικασίας 358
III.5.4. Μέθοδος της Βαθύτερης Καθόδου 361
III.5.5. Μέθοδος της Συζυγούς Διαβάθμισης 365
Βιβλιογραφία **376**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Βασικός σκοπός των Μαθηματικών υπήρξε κατ' αρχήν η δημιουργία γενικών Θεωριών, ανεξάρτητα του κατά πόσο οι σχετικές μέθοδοι ήταν εφαρμόσιμες σε συγκεκριμένα πρακτικά προβλήματα, έτσι ώστε να παρέχουν σαφή αριθμητικά αποτελέσματα.

Η έλλειψη υπολογιστικών μέσων αποτέλεσε σοβαρό λόγο για την καθυστέρηση της τροπής των Μαθηματικών προς μία συστηματική ανάπτυξη παράλληλων και διαφορετικών μεθόδων οι οποίες οδηγούν σε συγκεκριμένα αριθμητικά αποτελέσματα. Αυτές οι μέθοδοι απαιτούν πεπερασμένο, αλλά τεράστιο, πλήθος αριθμητικών πράξεων, ώστε η ευχερής, και μέσα σε λογικά χρονικά πλαίσια, εφαρμογή τους προϋποθέτει την χρήση ταχύτατων υπολογιστικών μηχανών. Και ακριβώς, η κατά τα τελευταία χρόνια αλματώδης ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών είχε πολύ ευεργετική επίδραση στην ανακάλυψη, την επεξεργασία και την εφαρμογή τέτοιων μεθόδων. Ένα κεντρικό γνωστικό αντικείμενο της Αριθμητικής Ανάλυσης έγκειται στην αναζήτηση, την δημιουργία και την μελέτη αυτών των μεθόδων, των λεγόμενων αριθμητικών μεθόδων. Τα κριτήρια επιλογής της κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου, που πρέπει να εφαρμοστεί για την επίλυση κάποιου προβλήματος, δεν είναι πάντοτε απλά, με συνέπεια αυτή η επιλογή να συνιστά ένα από τα δυσκολότερα στάδια της όλης διερεύνησης του εκάστοτε ζητήματος.

Ανεξάρτητα από τα όσα προηγήθηκαν, πρέπει να σημειωθεί ότι η εννοιολογική δυναμική και οι συνεχώς επεκτεινόμενες δυνατότητες της Αριθμητικής Ανάλυσης δίνουν διεξόδους και θεωρητικές προσεγγίσεις σε πολλά μαθηματικά ερωτήματα που είναι άγνωστο (ή και ανέφικτο) αν και πώς μπορούν να απαντηθούν με μεθόδους της κλασσικής Μαθηματικής Ανάλυσης. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε κάποια ολοκληρώματα πολλών συναρτήσεων ή λύσεις ορισμένων διαφορικών εξισώσεων ή ακόμη τον μοναδικό πραγματικό αριθμό ξ που επαληθεύει την εξίσωση $\xi = e^{-\xi}$. Σε μία τέτοια περίπτωση, αντικαθιστούμε την μαθηματική επίλυση του προβλήματος με την αριθμητική

επίλυσή του. Θα δίνουμε, για παράδειγμα, μία προσεγγιστική τιμή της λύσης της διαφορικής εξίσωσης σε έναν ορισμένο αριθμό σημείων του διαστήματος ολοκλήρωσης. Έτσι, η γενική θεματολογική κατεύθυνση της Αριθμητικής Ανάλυσης συνοψίζεται στον προσδιορισμό της σαν τον κλάδο των (Εφαρμοσμένων) Μαθηματικών που πραγματεύεται τις μεθόδους αριθμητικής επίλυσης των προβλημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης . Κατά τον *Henrici* ([28]), Αριθμητική Ανάλυση είναι η θεωρία των κατασκευαστικών μεθόδων της Μαθηματικής Ανάλυσης . Ο όρος κατασκευαστική μέθοδος σημαίνει ένα σύνολο από κανόνες, που λέγεται αλγόριθμος και που επιτρέπει την ανεύρεση της λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος με μία αξιόπιστη ακρίβεια και μετά από πεπερασμένο αριθμό αριθμητικών πράξεων.

Το πρώτο *Κεφάλαιο* του παρόντος Βιβλίου περιλαμβάνει μία συνοπτική αναφορά στις βοηθητικές έννοιες και εύχρηστες εφαρμογές της Θεωρίας Πινάκων. Μετά από μία σύντομη παράθεση βασικών ιδιοτήτων, εξετάζονται τρία σπουδαία προβλήματα που άπτονται της Θεωρίας αυτής: η επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, η αναζήτηση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα και η διάσπαση τετραγωνικών πινάκων. Κατά την αντιμετώπιση αυτών των προβλημάτων στο *Κεφάλαιο* αυτό, δόθηκε έμφαση στην κατανόηση των αφηρημένων τεχνικών επίλυσής τους, γιατί μέσα από αυτές περιγράφεται άμεσα το βαθύτερο θεωρητικό υπόβαθρο και μοντέλο που ανταποκρίνεται στην μελέτη της φύσης τους.

Στο δεύτερο *Κεφάλαιο*, αναπτύσσονται οι κύριες αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού των ιδιοδιανυσμάτων ενός τετραγωνικού πίνακα. Όπως θα δούμε, υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες τέτοιων μεθόδων. Στην πρώτη κατηγορία, περιλαμβάνονται όλες εκείνες οι τεχνικές που επιτρέπουν τον πρακτικό υπολογισμό ενός ιδιοδιανύσματος κάθε φορά, καθώς και όλες εκείνες οι μέθοδοι που οδηγούν στον διαδοχικό υπολογισμό όλων των ιδιοδιανυσμάτων. Οι μέθοδοι της δεύτερης κατηγορίας διακρίνονται σε δύο κύρια είδη: τις μεθόδους προσδιορισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και τις μεθόδους διάσπασης. Το

πρώτο είδος είναι το λιγότερο ενδιαφέρον (εκτός από ορισμένες ειδικές περιπτώσεις), επειδή πρέπει στην συνέχεια να υπολογισθούν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Το δεύτερο είδος έχει κυρίως επαναληπτικό χαρακτήρα ο οποίος στηρίζεται στην χρησιμοποίηση όμοιων μετασχηματισμών. Πέραν των μεθόδων που έχουν συμπεριληφθεί σε αυτό το δεύτερο *Κεφάλαιο*, υπάρχει και ένας μικρός αριθμός άλλων αριθμητικών μεθόδων που αναπτύσσονται αρκετά εξαντλητικά σε εργασίες και πραγματείες της Βιβλιογραφίας.

Στο τρίτο *Κεφάλαιο* παρουσιάζονται οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων και συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Μόνο λίγες αλγεβρικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν με την χρήση κλασσικών Μαθηματικών (:οι πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού ≤ 4). Με την χρήση αριθμητικών μεθόδων όμως έχει κατορθωθεί ο προσεγγιστικός εντοπισμός των ριζών μίας εξίσωσης της μορφής $f(\xi)=0$, όπου $f(x)$ είναι μία συνάρτηση πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής *x*. Στο πρώτο μέρος του *Κεφαλαίου* αυτού, θα ασχοληθούμε κυρίως με τον αριθμητικό υπολογισμό μίας απλής πραγματικής ρίζας της εξίσωσης $f(\xi)=0$. Στα υπόλοιπα μέρη του *Κεφαλαίου*, θα μελετήσουμε το πρόβλημα επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων *A.x=b* όπου *A* είναι ένας τετραγωνικός αντιστρέψιμος πίνακας με *n* γραμμές και *n* στήλες και όπου *b* είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$.Θεωρητικά ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να επιλυθεί υπολογίζοντας τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} του A. Όμως, το γεγονός ότι ο υπολογισμός του A^{-1} προϋποθέτει τον υπολογισμό της ορίζουσας του A, υπολογισμός που, με την σειρά του, απαιτεί την εκτέλεση $(n\times n)!$ πολλαπλασιασμών, φανερώνει ότι η μαθηματική επίλυση ενός μεγάλου συστήματος γραμμικών εξισώσεων είναι πρακτικά αδύνατη. Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων χωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες που είναι ριζικά διαφορετικές μεταξύ τους : τις άμεσες μεθόδους, που δίνουν θεωρητικά το διάνυσμα λύση x μετά από πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών αριθμητικών πράξεων, τις επαναληπτικές μεθόδους, που δίνουν την λύση x σαν όριο μιας ακολουθίας διανυσμάτων και τις μεθόδους προβολής .

Στο τέταρτο θεωρητικό *Κεφάλαιο* παρουσιάζεται μία εισαγωγή στην Διακριτή Αριθμητική Ανάλυση, δηλαδή στον κλάδο εκείνο της Αριθμητικής Ανάλυσης όπου η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση ενός συνεχούς φαινομένου με ένα προσεγγιστικό διακριτό φαινόμενο. Οι κεντρικές γνωστικές οντότητες του *Κεφαλαίου* αναφέρονται στην μελέτη του προβλήματος παρεμβολής, της αριθμητικής ολοκλήρωσης και παραγώγισης και τέλος της αριθμητικής επίλυσης μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης ή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Στο πέμπτο *Κεφάλαιο* συγκεντρώσαμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα και ασκήσεις, που αναφέρονται στα θεωρητικά εδάφια που προηγήθηκαν. Η προτίμηση που δείξαμε σε στοιχειώδη παραδείγματα οφείλεται, όχι μόνο στην επιθυμία μας για άμεση κατανόηση του μηχανισμού των διάφορων μεθόδων από μέρους του αναγνώστη, αλλά και στην απρόσκοπτη ευχέρεια συγκριτικών αντιπαραθέσεων των δυνατοτήτων τους. Η συλλογή λυμένων και άλυτων ασκήσεων πιστεύουμε ότι καλύπτει όλο το φάσμα των κυριότερων αριθμητικών μεθόδων.

Παρά την προσπάθεια που έγινε για μία αναλυτική και πλήρη ανάπτυξη των πρώτων *Κεφαλαίων* ενός μαθήματος Αριθμητικής Ανάλυσης, υπάρχουν μερικά ζητήματα και κάποιες ειδικές μεθοδολογίες, που δεν ήταν δυνατόν να συμπεριλάβουμε στα πέντε αυτά γενικά *Κεφάλαια*. Προς τούτο, ο κάθε ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να προστρέξει και να συμβουλευτεί τα συγγράμματα της προτεινόμενης Βιβλιογραφίας (στο τέλος του παρόντος βιβλίου), που όμως, όπως είναι φυσικό, αντιπροσωπεύει μόνο ένα μέρος του συνεχώς διογκούμενου καταλόγου σχετικών και συναφών πραγματειών.

Νικόλαος Ιω. Δάρας

Κεφάλαιο 1

Άλγεβρα Πινάκων

Ι.1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ι.1.1. Ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ C^n

Έστωσαν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ μιγαδικοί αριθμοί. Ας τοποθετήσουμε αυτούς τους αριθμούς σε στήλη και ας ονομάσουμε z αυτή την στήλη:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Ας θεωρήσουμε μία δεύτερη στήλη μιγαδικών αριθμών:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Θα ορίσουμε τώρα δύο πράξεις σ' αυτό το σύνολο στηλών: μία πράξη *εσωτερική*, που θα λέγεται ***πρόσθεση*** και θα συμβολίζεται με *+*, και μία πράξη *εξωτερική*, που θα λέγεται ***αριθμητικός πολλαπλασιασμός*** και θα συμβολίζεται με $\cdot$.

Η πρόσθεση θα ορίζεται από την σχέση:

$$z+w:=\begin{pmatrix} z_1+w_1 \\ z_2+w_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n+w_n \end{pmatrix}$$ (: ***άθροισμα*** *των* z *και* w).

Αυτή η πρόσθεση είναι μία *πράξη μεταθετικής* (ή *αβελιανής*) *ομάδας*. Πράγματι:

1°) *είναι* ***μεταθετική*** $(: z+w=w+z)$,

2°) *είναι* ***προσεταιριστική*** $(: z+(w+u)=(z+w)+u)$,

3°) *έχει* ***μοναδικό ουδέτερο στοιχείο*** (το ***μηδέν*** 0):

$$0:=\left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n \text{ φορές,}$$

τέτοιο ώστε $z+0=z$,

4°) *κάθε στοιχείο* z *έχει ένα* ***συμμετρικό*** (ή ***αντίθετο***), που συμβολίζεται με $-z$ και που ορίζεται από την:

$$-z:=\begin{pmatrix} -z_1 \\ -z_2 \\ \vdots \\ -z_n \end{pmatrix},$$

τέτοιο ώστε $z+(-z)=0$.

Ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός με έναν μιγαδικό αριθμό a θα ορίζεται από την σχέση:

$$a \cdot z := \begin{pmatrix} a \cdot z_1 \\ a \cdot z_2 \\ \vdots \\ a \cdot z_n \end{pmatrix}$$ (: ***γινόμενο*** *των* a *και* z).

Αυτός ο πολλαπλασιασμός διέπεται από τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1°) *είναι* ***επιμεριστικός*** *ως προς την πρόσθεση* (: $a \cdot (z + w) = a \cdot z + a \cdot w$, $(a + b) \cdot z = a \cdot z + b \cdot z$, για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$),

2°) *είναι* ***προσεταιριστικός*** (: $a \cdot (b \cdot z) = (ab) \cdot z$,για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$),

3°) *έχει* ***μοναδικό ουδέτερο στοιχείο*** (, που είναι ο μιγαδικός αριθμός 1), τέτοιο ώστε $1 \cdot z = z$.

Το σύνολο των μιγαδικών στηλών εφοδιασμένο με τις δύο παραπάνω πράξεις, συνιστά έναν διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{C}$ ή έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο. Αυτός ο διανυσματικός χώρος συμβολίζεται με $\mathbb{C}^n$ και τα στοιχεία του καλούνται (***μιγαδικά***) ***διανύσματα***. Οι αριθμοί $z_1, z_2, \ldots, z_n$ που αποτελούν ένα διάνυσμα ονομάζονται ***συνιστώσες*** του διανύσματος z. Συμβολίζονται πάντοτε με το ίδιο γράμμα όπως και το διάνυσμα με την συνοδεία ενός δείκτη θέσης.

Ανάλογα, το σύνολο των στηλών πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένο με την αντίστοιχη πρόσθεση + πραγματικών στηλών και το αντίστοιχο αριθμητικό γινόμενο $\cdot$ με πραγματικούς αριθμούς, συνιστά έναν διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$ ή έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο, που συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$ και τα στοιχεία του καλούνται (***πραγματικά***) ***διανύσματα***.

Ι.1.2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Μία ***απεικόνιση*** f από το $\mathbb{C}^n$ στο $\mathbb{C}^m$ είναι μία αντιστοιχία κάθε στοιχείου $z \in \mathbb{C}^n$ σε αποκλειστικό αντιπροσωπευτικό στοιχείο του $\mathbb{C}^m$, που συμβολίζεται με $f(z)$.

Λέμε ότι το $f(z)$ είναι η ***εικόνα*** του z μέσω της f.

Συμβολίζουμε μία απεικόνιση f με την αναπαράσταση :

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m : z \mapsto f(z).$$

Μία απεικόνιση f καλείται ***$\mathbb{C}$-γραμμική*** (αντιστοίχως, ***$\mathbb{R}$-γραμμική***), εάν είναι '*κλειστή*' ως προς την πρόσθεση και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό, δηλαδή εάν διατηρεί τα αθροίσματα και τα αριθμητικά γινόμενα, υπό την έννοια ότι:

1°) $f(z+w) = f(z) + f(w)$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}^n$

2°) $f(a \cdot z) = a\, f(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$ και $a \in \mathbb{C}$ (αντιστοίχως, $a \in \mathbb{R}$).

Ι.1.3. ΠΙΝΑΚΕΣ

Ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{K}^n$ (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{R}$):

$$e^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ e^{(n-1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε, κάθε διάνυσμα $z \in \mathbb{K}$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή :

$$z = z_1 \cdot e^{(1)} + z_2 \cdot e^{(2)} + \cdots + z_n \cdot e^{(n)}$$

όπου $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι οι συνιστώσες του z .

Έστω τώρα μία $\boldsymbol{K}$ -γραμμική απεικόνιση $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m : z \mapsto f(z)$. Τότε:

$$f(z) = z_1 \cdot f(e^{(1)}) + z_2 \cdot f(e^{(2)}) + \ldots + z_n \cdot f(e^{(n)}),$$

και, επομένως, η γνώση των διανυσμάτων

$$f(e^{(1)}), f(e^{(2)}), \ldots, f(e^{(n)}) \in \boldsymbol{K}^m$$

προσδιορίζει ακριβώς την γραμμική απεικόνιση f, υπό την έννοια ότι εάν τα διανύσματα $w_j = f(e^{(j)})$ είναι γνωστά (για $j = 1,2,\ldots,n$), τότε

$$f(z) = z_1 \cdot w_1 + \ldots + z_n \cdot w_n .$$

Αντιστρόφως, εάν δοθούν n διανύσματα $w_j \in \boldsymbol{K}^m$ (για $j = 1,2,\ldots,n$), η απεικόνιση:

$$f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m : z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto f(z) = z_1 \cdot w_1 + \ldots + z_n \cdot w_n$$

είναι $\boldsymbol{K}$ -γραμμική.

Μετά από τα παραπάνω, είναι σαφές ότι κάθε γραμμική απεικόνιση του $\boldsymbol{K}^n$ στο $\boldsymbol{K}^m$ είναι πλήρως χαρακτηρισμένη από την χωροταξική τοποθέτηση των εικόνων των διανυσμάτων $e^{(1)}$, $e^{(2)}$,..., $e^{(n)}$. Ας συμβολίσουμε με $a_{i,j}$ την *i*-συνιστώσα του διανύσματος $f(e^{(j)})$:

$$a_{i,j} = [f(e^{(j)})]_i ,$$

και ας παραθέσουμε αυτούς τους αριθμούς σε μία διάταξη διπλής εισόδου:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι η πρώτη στήλη του A είναι το διάνυσμα $f(e^{(1)})$, η δεύτερη στήλη ταυτίζεται με το $f(e^{(2)})$,..., και η τελευταία με το $f(e^{(n)})$. Οι αριθμοί $a_{i,j}$ λέγονται *στοιχεία* του A. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος δείκτης i δείχνει την *γραμμή*, ενώ ο δεύτερος δείκτης j δείχνει την *στήλη*. Η κατ' αυτόν τον τρόπο διατεταγμένη παράθεση A των αριθμών $a_{i,j}$ λέγεται ***πίνακας***. Αυτός ο πίνακας προσδιορίζει την γραμμική απεικόνιση f.

Στην συνέχεια, θα ταυτίσουμε τον πίνακα *A* με την γραμμική απεικόνιση f που προσδιορίζει.

Για να καθιστούμε σαφές ότι τα στοιχεία του πίνακα *A* είναι τα $a_{i,j}$, γράφουμε

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \text{ ή πιο απλά } A = (a_{i,j}).$$

Επίσης για να καταστήσουμε σαφές ότι ο πίνακας *A* έχει *m* γραμμές και *n* στήλες, λέμε ότι ο *A* είναι ένας πίνακας $m \times n$. Εάν $m = n$, ο πίνακας *A* λέγεται ***τετραγωνικός***.

Είναι προφανές ότι οι συνιστώσες $w_1, w_2, \dots, w_m$ του διανύσματος $w \in \mathbb{K}^m$ εκφράζονται σαν συνάρτηση των συνιστωσών $z_1, z_2, \dots, z_n$ του διανύσματος $z \in \mathbb{K}^n$, με την βοήθεια των σχέσεων:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{1,1} \cdot z_1 + a_{1,2} \cdot z_2 + \cdots + a_{1,n} \cdot z_n \\ w_2 &= a_{2,1} \cdot z_1 + a_{2,2} \cdot z_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot z_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_m &= a_{m,1} \cdot z_1 + a_{m,2} \cdot z_2 + \cdots + a_{m,n} \cdot z_n \end{aligned}$$

οι οποίες μπορούν να γραφούν συνοπτικά υπό την μορφή:

$$w = A \cdot z$$

όπου $A \cdot z$ είναι το διάνυσμα του K^m που έχει *i*-συνιστώσα τον αριθμό:

$$(A \cdot z)_i = a_{i,1} \cdot z_1 + a_{i,2} \cdot z_2 + \cdots + a_{i,n} \cdot z_n \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

Αυτό το σύνολο των *m* σχέσεων προσδιορίζει εντελώς τον πολλαπλασιασμό ενός πίνακα με ένα διάνυσμα. Υπάρχει λοιπόν ισοδυναμία μεταξύ των εκφράσεων $w = f(z)$ και $w = A \cdot z$ όπου *A* είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση f και όπου το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα ορίζεται ακριβώς με τον τρόπο που ορίσθηκε παραπάνω.

Ι.2. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΙΝΑΚΩΝ

Οι πράξεις μεταξύ πινάκων ορίζονται μέσω των αντίστοιχων πράξεων μεταξύ των K-γραμμικών απεικονίσεων που αναπαριστούν $(K = R$ ή $C)$:

1°) ***πρόσθεση***:

$$f(z) + g(z),$$

όπου $f : K^n \to K^m$ και $g : K^n \to K^m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις,

2°) ***αριθμητικός πολλαπλασιασμός***:

$$a \cdot f(z),$$

όπου $a \in K$ και $f : K^n \to K^m$ είναι γραμμική απεικόνιση,

3°) ***σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων***:

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)),$$

όπου $\left\| \begin{array}{l} f : K^n \to K^m \\ g : K^m \to K^k. \end{array} \right.$

Ι.2.1.ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Έστωσαν $f : K^n \to K^m$ και $g : K^n \to K^m$ δύο K -γραμμικές απεικονίσεις.

Ορίζουμε το ***άθροισμα των f και g*** ως την απεικόνιση:

$$h = (f+g) : K^n \to K^m : z \mapsto h(z) = (f+g)(z) := f(z) + g(z).$$

Είναι εύκολη η διαπίστωση της K -γραμμικότητας της *h=(f+g)*. Πραγματικά, αφ' ενός

$$\begin{aligned} h(z+w) &= f(z+w) + g(z+w) \\ &= f(z) + f(w) + g(z) + g(w) \\ &= [f(z) + g(z)] + [f(w) + g(w)] \\ &= h(z) + h(w), \end{aligned}$$

και αφ' ετέρου

$$\begin{aligned} h(a \cdot z) &= f(a \cdot z) + g(a \cdot z) \\ &= a \cdot f(z) + a \cdot g(z) \\ &= a \cdot [f(z) + g(z)] = a \cdot h(z) \end{aligned}$$

(για οποιοδήποτε $a \in K$).

Έστωσαν τώρα:

$$A = (a_{i,j}) \text{ και } B = (\beta_{i,j})$$

οι δύο $m \times n$ πίνακες, που ορίζουν τις γραμμικές απεικονίσεις $f : K^n \to K^m$ και $g : K^n \to K^m$ αντιστοίχως.

Τότε, η απεικόνιση άθροισμα $h = (f+g) : K^n \to K^m$

μπορεί να ορισθεί μέσω ενός πίνακα $m \times n$:

$$C = (c_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}.$$

Επειδή μάλιστα είναι:

$$h(e^{(j)}) = f(e^{(j)}) + g(e^{(j)}), \quad \text{για } j=1,2,\ldots,n,$$

θα είναι και:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + \beta_{i,j} \quad (i=1,2,\ldots,m \text{ και } j=1,2,\ldots,n).$$

Μετά από αυτά, μπορούμε να ορίσουμε την ***πρόσθεση των δύο πινάκων*** $A = (a_{i,j})$ και $B = (\beta_{i,j})$. Το *άθροισμά* τους είναι ο πίνακας C, και γράφουμε:

$$C = A + B.$$

Επεξηγηματικότερα, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \ldots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \ldots & \beta_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m,1} & \beta_{m,2} & \ldots & \beta_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \ldots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{1,1}+\beta_{1,1} & a_{1,2}+\beta_{1,2} & \ldots & a_{1,n}+\beta_{1,n} \\ a_{2,1}+\beta_{2,1} & a_{2,2}+\beta_{2,2} & \ldots & a_{2,n}+\beta_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1}+\beta_{m,1} & a_{m,2}+\beta_{m,2} & \ldots & a_{m,n}+\beta_{m,n} \end{pmatrix}$$

Αυτή η πρόσθεση δύο $m \times n$ πινάκων, που μόλις ορίσαμε, είναι μία *πράξη μεταθετικής (ή αβελιανής) ομάδας*, γιατί έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1°) *είναι* ***μεταθετική*** (:$A+B=B+A$) ,

2°) *είναι* ***προσεταιριστική*** ($A+(B+E)=(A+B)+E$),

3°) *έχει* ***μοναδικό ουδέτερο στοιχείο*** τον ***μηδενικό*** $m \times n$ ***πίνακα***:

$$0 := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ φορές}} \Bigg\} \text{m φορές},$$

τέτοιον ώστε $A+0=A$,

4°) *κάθε* $m \times n$ *πίνακας Α έχει έναν* ***μοναδικό αντίθετο*** $m \times n$ *πίνακα*, που συμβολίζεται με – *Α* και που ορίζεται από την ισότητα:

$$-A := \begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & \dots & -a_{m,n} \end{pmatrix}$$

τέτοιον ώστε $A+(-A)=0$.

Ι.2.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Έστω $f : K^n \to K^m$ μία K-γραμμική απεικόνιση και έστω $a \in K$. Ορίζουμε το ***αριθμητικό γινόμενο της*** f ***επί το*** $a \in K$, ως την απεικόνιση:

$$h = (a \cdot f) : K^n \to K^m : z \mapsto h(z) = (a \cdot f)(z) := a \cdot f(z).$$

Η K - γραμμικότητα της απεικόνισης *h* διαπιστώνεται εύκολα.

Έστω τώρα:

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

και ας συμβολίσουμε με $f : K^n \to K^m$ την K – γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στον πίνακα *Α*. Τότε, η απεικόνιση αριθμητικό γινόμενο $h = (a \cdot f) : K^n \to K^m$ μπορεί να ορισθεί μέσω ενός $m \times n$ πίνακα:

$$C = (c_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m}.$$

Καθώς μάλιστα είναι:

$$h(e^{(j)}) = a \cdot f(e^{(j)}), \quad \text{για } j=1,2,\ldots,n,$$

θα ισχύει :

$$c_{i,j} = a \cdot a_{i,j} \quad (i = 1,2,\ldots,m \text{ και } j = 1,2,\ldots,n).$$

Μετά από όσα προηγήθηκαν, μπορούμε να ορίσουμε τον ***αριθμητικό πολλαπλασιασμό του πίνακα*** A ***επί τον αριθμό*** a . Το (*αριθμητικό*) *γινόμενό τους* είναι ο πίνακας *C*, και γράφουμε:

$$C = a \cdot A .$$

Αναλυτικότερα έχουμε:

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \cdot a_{1,1} & a \cdot a_{1,2} & \ldots & a \cdot a_{1,n} \\ a \cdot a_{2,1} & a \cdot a_{2,2} & \ldots & a \cdot a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a \cdot a_{m,1} & a \cdot a_{m,2} & \ldots & a \cdot a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Αυτός ο (αριθμητικός) πολλαπλασιασμός, πίνακα επί αριθμό, έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1°) *είναι* ***επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση*** (: $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$ και $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot B$ για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$),

2°) *είναι* ***προσεταιριστικός*** (: $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$, για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$),

3°) *έχει* ***μοναδικό ουδέτερο στοιχείο***, που είναι ο μοναδικός αριθμός $1 \in \mathbb{K}$, τέτοιος ώστε $1 \cdot A = A$.

Κατόπιν όλων όσων προηγήθηκαν, *το σύνολο των* $m \times n$ *πινάκων, εφοδιασμένο με την πρόσθεση που ορίστηκε στην Παράγραφο Ι.2.1 και με τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό που ορίσθηκε στην παρούσα Παράγραφο, είναι ένας καινούργιος διανυσματικός χώρος.* Συμβολίζουμε με:

$$\mathrm{M}_{m\times n}$$

αυτόν τον διανυσματικό χώρο.

Ι.2.3. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστωσαν $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^\kappa$ και $g : \boldsymbol{K}^\kappa \to \boldsymbol{K}^m$ δύο γραμμικές απεικονίσεις και έστωσαν A και B οι αντίστοιχοι πίνακές τους.

Ορίζουμε την απεικόνιση ***σύνθεση*** h **, των** f **και** g, με:

$$h = (g \circ f) : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m : z \mapsto h(z) = (g \circ f)(z) := g(f(z)).$$

Η *h* είναι γραμμική απεικόνιση, γιατί

$$h(z+w) = g(f(z+w)) = g(f(z)+f(w)) = g(f(z)) + g(f(w)) = h(z) + h(w)$$

και

$$h(a \cdot z) = g(f(a \cdot z)) = g(a \cdot f(z)) = a \cdot g(f(z)) = a \cdot h(z)$$

για κάθε $a \in \boldsymbol{K}$.

Έτσι, η απεικόνιση σύνθεση *h* μπορεί να ορισθεί μέσω ενός πίνακα $m \times n$:

$$C = (c_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}.$$

Επειδή μάλιστα είναι:

$$h(e^{(j)}) = g(f(e^{(j)})) = g(\sum_{1\le k\le m} \beta_{k,j} \cdot e^{(k)}) = \sum_{1\le k\le m} \beta_{k,j} \cdot g(e^{(k)})$$

$$= \sum_{1\le k\le m} \beta_{k,j} \cdot \sum_{1\le i\le m} a_{i,k} \cdot e^{(i)}$$

$$= \sum_{1\le i\le m} (\sum_{1\le k\le m} a_{i,k}\beta_{k,j}) \cdot e^{(i)},$$

θα είναι και:

$$c_{i,j} = [h(e^{(j)})]_i = \sum_{1\le k\le m} a_{i,j}\beta_{k,j}.$$

Ο πίνακας $C = (c_{i,j})$, που μόλις ορίσαμε με τον πιο πάνω τρόπο, είναι ένας καινούργιος $m \times n$ πίνακας και λέγεται ***γινόμενο του A με τον B*** **(*με αυτήν την διάταξη*).** Συμβολίζεται με:

$$C = A \cdot B,$$

και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

1°) ***προσεταιριστικότητα*** (: $A \cdot (B \cdot D) = (A \cdot B) \cdot D$),

2°) ***δεν ισχύει (γενικά) η μεταθετικότητα*** (: $A \cdot B \ne B \cdot A$), κι αυτό μόνον και μόνον γιατί (γενικά) $f \circ g \ne g \circ f$,

3°) ***ύπαρξη ενός μοναδιαίου τετραγωνικού πίνακα***, που συμβολίζεται με I_n ή και με I :

$$\mathrm{I} = (\delta_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathrm{O} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ με } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, \text{εάν } i \ne j \\ 1, \text{εάν } i = j \end{cases},$$

τέτοιου ώστε $\mathrm{I} \cdot A = A \cdot \mathrm{I} = A$,

4ο) ***υπάρχουν μη-μηδενικοί τετραγωνικοί πίνακες, που όμως το γινόμενό τους είναι ο μηδενικός πίνακας*** (: π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A = 0 \text{),}$$

5ο) ***επιμεριστικότητα ως προς την πρόθεση*** (: επιμεριστικότητα από δεξιά $A \cdot (B + D) = A \cdot B + A \cdot D$, και επιμεριστικότητα από αριστερά $(A + B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D$ *(A+B)*),

6ο) $a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B)$*a, για κάθε* $a \in K$.

Στην συνέχεια, δοθέντος ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα *A*, θα συμβολίζουμε με A^{κ} τον πίνακα:

$$A^{\kappa} = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\kappa \text{ φορές}}.$$

Όπως αποδεικνύεται εύκολα, ισχύει:

7ο) $A^{\kappa} \cdot A^{\lambda} = A^{\lambda} \cdot A^{\kappa} = A^{\kappa+\lambda}$.

Ι.2.4. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΩΝ

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται ***άνω τριγωνικός*** εάν:

$$a_{i,j} = 0 \text{ όταν } i > j.$$

Σε μία τέτοια περίπτωση, ο A είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ & \mathrm{O} & & \ddots & \\ & & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται ***κάτω τριγωνικός*** εάν:

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{όταν} \quad i < j\,.$$

Σε μία τέτοια περίπτωση, η γενική μορφή του πίνακα *A* έχει ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \mathrm{O} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται ***διαγώνιος*** εάν:

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{όταν} \quad i \neq j\,.$$

Η γενική μορφή ενός διαγώνιου πίνακα *A* είναι η ακόλουθη:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & \\ & & a_{2,2} & \mathrm{O} & \\ & \mathrm{O} & & \ddots & \\ & & & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Συναφές προς αυτές τις έννοιες είναι το επόμενο κλασσικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα Ι.2.4.1. ***Το γινόμενο δύο πινάκων άνω τριγωνικών ή δύο πινάκων κάτω τριγωνικών ή δύο διαγωνίων πινάκων είναι πίνακας του ιδίου τύπου. Επί πλέον, η κύρια διαγώνιος του πίνακα γινομένου είναι το γινόμενο των κυρίων διαγωνίων των αρχικών πινάκων.***

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση δύο άνω τριγωνικών πινάκων $A = (a_{i,j})$ και $B = (\beta_{i,j})$. Οι άλλες περιπτώσεις είναι ακριβώς ανάλογες.

Έστω $C = (c_{i,j})$ ο πίνακας γινόμενο των *A* και *B*. Τότε:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} a_{i,k} \cdot \beta_{k,j} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{i,k} \cdot \beta_{k,j} .$$

Εάν $i > j$, τότε στο πρώτο άθροισμα είναι $a_{i,k} = 0$ για $k = 1,2,\ldots, j$, ενώ στο δεύτερο άθροισμα είναι $\beta_{k,j} = 0$ για $k = j+1,\ldots,n$. Επομένως:

$$c_{i,j} = 0 \quad \text{όταν} \quad i > j .$$

Ομοίως, μπορούμε να γράψουμε:

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} \cdot \beta_{k,i} + a_{i,i} \cdot \beta_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} \cdot \beta_{k,i} .$$

Για τους ίδιους λόγους όπως και προηγουμένως , τα δύο αθροίσματα είναι μηδέν και, κατά συνέπεια, ισχύει:

$$c_{i,i} = a_{i,i} . \beta_{i,i} \quad \text{για} \quad i = 1,2,\ldots,n ,$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη*. ■

Ι.2.5. ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΔΟΘΕΝΤΑ

Έστω $A=(a_{i,j})$ ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας. Ονομάζουμε ***ανάστροφο πίνακα*** του *A* και συμβολίζουμε με

$$A^T=(a^T_{i,j})$$

τον $n\times n$ τετραγωνικό πίνακα, τα στοιχεία του οποίου ορίζονται από τις σχέσεις:

$$a^T_{i,j}:=a_{j,i} \quad \text{για} \quad i,j=1,2,\ldots,n\,.$$

Έτσι, *οι γραμμές του* A^T *είναι οι στήλες του A και οι στήλες του* A^T *είναι οι γραμμές του A.*

Ο πίνακας A λέγεται ***συμμετρικός***, εάν $A=A^T$, δηλαδή εάν:

$$a_{i,j}=a_{j,i}\,, \quad \text{για} \quad i,j=1,2,\ldots,n\,.$$

Ας παραθέσουμε τις βασικές ιδιότητες της αναστροφής πινάκων. Οι αποδείξεις τους είναι απλές και παραλείπονται:

1°) $(A^T)^T=A$,

2°) $(A+B)^T=A^T+B^T$,

3°) $(a\cdot A)^T=a\cdot A^T$ (για κάθε $a\in K$),

4°) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Ονομάζουμε ***συζυγή πίνακα*** του *A* και συμβολίζουμε με

$$\overline{A}$$

τον $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα, τα στοιχεία του οποίου είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί των στοιχείων του *A*, δηλαδή τον πίνακα:

$$\overline{A} = (\overline{a}_{i,j}).$$

Ονομάζουμε ***δυϊκό πίνακα*** του *A* και συμβολίζουμε με

$$A^* = (a^*_{i,j})$$

τον ανάστροφο συζυγή πίνακα του *A*. Με άλλα λόγια :

$$A^* = (\overline{A})^T = (\overline{A^T}) \quad \text{και} \quad a^*_{i,j} = \overline{a}_{j,i} \quad \text{για} \quad i, j = 1,2,\ldots,n\,.$$

Ο πίνακας *A* λέγεται ***ερμιτιανός***, εάν $A = A^*$, δηλαδή εάν:

$$a_{i,j} = \overline{a}_{j,i} \quad \text{για} \quad i, j = 1,2,\ldots,n\,.$$

Επίσης, είναι αξιοσημείωτη η παρατήρηση ότι ***για οποιοδήποτε*** $n \times n$ ***τετραγωνικό πίνακα A, το γινόμενο***:

$$A \cdot A^T$$

είναι οπωσδήποτε ερμιτιανός πίνακας.

Τέλος, συναφείς προς τις έννοιες της συζυγίας και δυϊκότητας των τετραγωνικών πινάκων είναι οι πιο κάτω θεμελιώδεις ιδιότητες, οι οποίες αποδεικνύονται χωρίς καμμία δυσκολία:

1°) $\overline{(\overline{A})} = A$, και $(A^*)^* = A$,

2°) $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$, και $(A+B)^* = A^* + B^*$,

3°) $(\overline{A \cdot B}) = \overline{A} \cdot \overline{B}$ και $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$,

4°) $(a \cdot A) = \overline{a} \cdot A$, και $(a \cdot A)^* = \overline{a} \cdot A^*$ $(a \in K)$.

Ι.3. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ι.3.1.ΓΡΑΜΜΙΚΗΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστωσαν $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ διανύσματα του $K^n (K = C$ ή $K = R)$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται ***K -γραμμικά ανεξάρτητα***, εάν δεν υπάρχουν αριθμοί του K : $a_1, a_2, \ldots, a_m$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε: $a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_m \cdot z^{(m)} = 0$.

Με άλλα λόγια, εάν η σχέση:

$$a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_m \cdot z^{(m)} = 0$$

συνεπάγεται τις ισότητες:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0,$$

τότε τα διανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητα.

Στην αντίθετη περίπτωση, τα πιο πάνω διανύσματα λέγονται ***K -γραμμικά εξαρτημένα***. Τα διανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ είναι λοιπόν K -γραμμικά εξαρτημένα, εάν υπάρχει ένα σύστημα αριθμών $a_1, a_2, \ldots, a_m$ του K, όχι όλων ίσων με μηδέν, τέτοιων ώστε:

$$a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_m \cdot z^{(m)} = 0.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι *w* είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του C^n. Λέμε ότι ***το w είναι K -γραμμικά εξαρτημένο από τα διανύσματα*** $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$, εάν τα διανύσματα *w*, $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ είναι K -γραμμικά εξαρτημένα. Ομοίως, θα λέμε ότι ***το w είναι K -γραμμικά ανεξάρτητο από τα*** $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$, εάν τα διανύσματα *w*, $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ είναι K -γραμμικά ανεξάρτητα.

Ι.3.2.ΒΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Έστωσαν n το πλήθος διανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ του K^n. Το σύνολο $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ καλείται ***K -βάση*** του K^n, εάν τα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ είναι K-γραμμικά ανεξάρτητα (και κάθε $w \in K^n - \{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από τα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$).

Ο αριθμός n λέγεται ***K -διάσταση*** του $K^n (K = C$ ή $K = R)$.

Αποδεικνύεται ότι ***κάθε υποσύνολο του K^n, που περιέχει ακριβώς n K-γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, είναι K-βάση του K^n***, γιατί κάθε τέτοιο σύνολο δεν μπορεί να διευρυνθεί με την προσθήκη επί πλέον διανύσματος χωρίς την απώλεια της ιδιότητας της K-γραμμικής ανεξαρτησίας. Με άλλα λόγια, κάθε υποσύνολο του K^n, που περιέχει ακριβώς *n* το πλήθος K-γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, είναι μέγιστο ως προς την ιδιότητα της K-γραμμικής ανεξαρτησίας.

Η έννοια της K-βάσης του K^n δεν είναι μονοσήμαντα προσδιορισμένη, αφού υπάρχουν πολλές K-βάσεις του K^n. Αντίθετα, η K-διάσταση του K^n είναι μοναδική.

Το κλασσικότερο, συνηθέστερο και σπουδαιότερο παράδειγμα K-βάσης του K^n είναι το σύνολο των διανυσμάτων $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$, που χρησιμοποιήθηκαν στην *Παράγραφο Ι.1.3* :

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Το σύνολο $\{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ ονομάζεται ***κανονική K-βάση*** *του* K^n.

Θεώρημα Ι.3.2.1. ***Εάν***

$$\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$$

είναι μία K ***-βάση του*** K^n***, τότε κάθε*** $w \in K^n$ ***γράφεται, κατά μοναδικό τρόπο, υπό την μορφή***

$$w = a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_n \cdot z^{(n)} \quad (a_j \in K).$$

Οι μοναδικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος*** w ***ως προς την*** K ***-βάση***

$$\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}.$$

Απόδειξη. Έστω $w \in K^n$. Αν υπάρχει *j* τέτοιο ώστε $w = z^{(j)}$, τότε η *Απόδειξη* είναι προφανής: αρκεί να επιλέξουμε $a_1 = a_2 = \ldots = a_{j-1} = a_{j+1} = \ldots = a_n = 0$ και $a_j = 1$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $w \in K^n - \{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$.

Από τον ορισμό της έννοιας της K-βάσης του K^n, το *w* είναι K-γραμμικά εξαρτημένο από τα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$. Γι' αυτό υπάρχουν κάποιοι αριθμοί $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε:

$$c_0 \cdot w + c_1 \cdot z^{(1)} + c_2 \cdot z^{(2)} + \cdots + c_n \cdot z^{(n)} = 0.$$

Ο c_0 είναι οπωσδήποτε μη μηδενικός αριθμός, επειδή στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν $c_1 \cdot z^{(1)} + c_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + c_n \cdot z^{(n)} = 0$ με $c_1, c_2, \ldots, c_n$ όχι όλους μηδέν, γεγονός που θα σήμαινε ότι τα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ δεν είναι K-γραμμικά ανεξάρτητα. Μπορούμε, επομένως, να εκφράσουμε το *w* υπό την μορφή:

$$w = a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_n \cdot z^{(n)},$$

με

$$a_j = -\frac{c_j}{c_0} \text{ (για } j=1,2,\ldots,n).$$

Απομένει να δειχθεί ότι η πιο πάνω έκφραση του *w* είναι μοναδική. Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι το *w* μπορεί να γραφτεί και υπό την διαφορετική μορφή:

$$w = \beta_1 \cdot z^{(1)} + \beta_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + \beta_n \cdot z^{(n)}.$$

Τότε, με κατά μέλη αφαίρεση, θα ήταν:

$$0 = (a_1 - \beta_1) \cdot z^{(1)} + (a_2 - \beta_2) \cdot z^{(2)} + \ldots + (a_n - \beta_n) \cdot z^{(n)},$$

με τους συντελεστές $(a_1 - \beta_1), (a_2 - \beta_2), \ldots, (a_n - \beta_n)$ όχι όλους μηδέν, γεγονός που θα πιστοποιούσε ότι τα διανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ είναι K-γραμμικά εξαρτημένα, ισχυρισμός που είναι άτοπος γιατί το σύνολο $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ είναι K-βάση του K^n.

Άρα, η μορφή $\beta_1 \cdot z^{(1)} + \beta_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + \beta_n \cdot z^{(n)}$ δεν μπορεί να διαφέρει καθόλου από την $a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_n \cdot z^{(n)}$, και συνεπώς είναι:

$$a_1 = \beta_1, a_2 = \beta_2, \ldots, a_n = \beta_n.$$

Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* ολοκληρώθηκε. ■

Ι.3.3. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ο διανυσματικός χώρος K^n καλείται ***χώρος εσωτερικού γινομένου*** ή ***χώρος προ-Hilbert,*** εάν σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων *z* και *w* του K^n αντιστοιχισθεί ένας αριθμός

$$\langle z / w \rangle \in K ,$$

αποκαλούμενος ***εσωτερικό γινόμενο*** *των z και w*, τέτοιος ώστε να επαληθεύονται οι ακόλουθες πέντε συνθήκες:

1°) $\langle w / z \rangle = \overline{\langle z / w \rangle}$ (η μπάρα σημαίνει μιγαδική συζυγία),

2°) $\langle z + u / w \rangle = \langle z / w \rangle + \langle u / w \rangle$, εάν $z, w, u \in K^n$,

3°) $\langle a \cdot z / w \rangle = a \langle z / w \rangle$, εάν $z, w \in K^n$ και $a \in K$,

4°) $\langle z / z \rangle \geq 0$, για όλα τα $z \in K^n$,

5°) $\langle z / z \rangle = 0$, μόνον όταν $z = 0$.

Εάν $\langle z / w \rangle = 0$, τότε το διάνυσμα *z* λέγεται ***ορθογώνιο*** *προς το w,* και συμβολίζουμε με $z \perp w$. Επειδή η ισότητα $\langle z / w \rangle = 0$ συνεπάγεται την ισότητα $\langle w / z \rangle = 0$, *η σχέση* $\perp$ *είναι συμμετρική*. Εάν $E \subset K^n$ και $F \subset K^n$, ο συμβολισμός $E \perp F$ σημαίνει ότι $z \perp w$ για οποιαδήποτε $z \in E$ και $w \in F$. Επίσης $E^{\perp}$ είναι το σύνολο όλων των $w \in K^n$ που είναι ορθογώνια προς κάθε $z \in E$.

Σε κάθε εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot / \cdot \rangle$ του K^n επισυνάπτεται η αντίστοιχη ***νόρμα*** $\| \cdot \|$ του K^n, δηλαδή η απεικόνιση:

$$\| \cdot \| : K^n \to [0, +\infty[: z \mapsto \|z\| := \langle z / z \rangle^{1/2} ,$$

που, με την σειρά της, οδηγεί στην αντίστοιχη ***μετρική*** $dist(\cdot,\cdot)$ του K^n, δηλαδή την απεικόνιση:

$$dist(\cdot,\cdot) : K^n \times K^n \to [0,+\infty[: (z,w) \mapsto dist(z,w) := \|z-w\| .$$

Δοθέντων δύο διανυσμάτων $z \in K^n$ και $w \in K^n$, ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $dist(z,w)$ ονομάζεται ***απόσταση των*** z ***και*** w. Εάν ο διανυσματικός χώρος K^n, εφοδιασμένος με μία τέτοια μετρική, είναι πλήρης, τότε λέγεται ***χώρος Hilbert***.

Στη συνέχεια και σε ό,τι ακολουθήσει, θα θεωρούμε ότι ο K^n είναι εφοδιασμένος με το ***Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο***:

$$\langle \cdot / \cdot \rangle : K^n \times K^n \to K : (z,w) \mapsto \langle z / w \rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j . w_j \ .$$

Η αντίστοιχη νόρμα:

$$\| \cdot \| : K^n \to [0,+\infty[: z \mapsto \|z\| := \langle z / z \rangle^{\frac{1}{2}} = (\sum_{j=1}^{n} z_j^2)^{1/2}$$

λέγεται ***Ευκλείδεια νόρμα*** *του* K^n, ενώ η αντίστοιχη μετρική :

$$d(\cdot,\cdot) : K^n \times K^n \to [0,+\infty[: (z,w) \mapsto d(z,w) := (\sum_{j=1}^{n} |z_j - w_j|^2)^{1/2}$$

Ευκλείδεια μετρική του K^n.

Επειδή κάθε ακολουθία σημείων του K^n***, των οποίων οι Ευκλείδειες αποστάσεις μικραίνουν απεριόριστα, συγκλίνει, ως προς την Ευκλείδεια μετρική, σε σημείο του*** K^n***, ο διανυσματικός χώρος*** K^n***, εφοδιασμένος με το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert, και θα ονομάζεται Ευκλείδειος χώρος.***

Κλασσικό παράδειγμα Ευκλείδειου χώρου αποτελεί το μοντέλο του μιγαδικού επιπέδου C ($n=1$), με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του (αριθμητικού) πολλαπλασιασμού: το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $\langle z / w \rangle$ δύο μιγαδικών αριθμών *z* και *w* είναι το γινόμενο τους: $\langle z / w \rangle = z\,w$, η Ευκλείδεια νόρμα $\|z\|$ ενός μιγαδικού αριθμού *z* είναι απλά το μέτρο του $|z|$, ενώ η Ευκλείδεια απόσταση $d(z,w)$ δύο μιγαδικών αριθμών z και w είναι ακριβώς $d(z,w) = |z-w|$.

Πιο κάτω παραθέτουμε τις σπουδαιότερες ιδιότητες του προκύπτουν από την Ευκλείδεια δομή του διανυσματικού χώρου K^n.

Θεώρημα Ι.3.3.1. ***Εάν*** $z \in K^n$, $w \in K^n$, ***τότε:***

$$\|w\| \le \|\lambda \cdot z + w\| \text{ για κάθε } \lambda \in K$$

εάν και μόνον εάν:

$$z \perp w.$$

Επί πλέον:

$$|\langle z / w \rangle| \le \|z\| \, \|w\| \text{ (:Ανισότητα Schwarz)}$$

και:

$$\|z + w\| \le \|z\| + \|w\| \text{ (:Τριγωνική Ανισότητα).}$$

Απόδειξη. Θέτοντας $\mathrm{a} := \langle z / w \rangle$, ένας απλός υπολογισμός δίνει:

$$0 \le \|\lambda . z + w\|^2 = |\lambda|^2 \, \|z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{a}\,\lambda) + \|w\|^2 .$$

Έτσι, $\|w\| \le \|\lambda \cdot z + w\| \, (\lambda \in K) \Leftrightarrow \mathrm{a} = \langle z / w \rangle = 0 \Leftrightarrow z \perp w$. Εάν $z = 0$, τότε η *Ανισότητα Schwarz* και η *Τριγωνική Ανισότητα* είναι, τετριμμένα, προφανείς. Εάν $z \ne 0$, τότε, για $\lambda = -\bar{\mathrm{a}}/\|z\|^2$, λαμβάνουμε την:

$$0 \le \|\lambda \cdot z + w\|^2 = \|w\|^2 - \frac{|\mathrm{a}|^2}{\|z\|^2},$$

που αποδεικνύει την *Ανισότητα Schwarz* και επί, πλέον, ότι:

$$\|w\| \le \|\lambda \cdot z + w\| \quad (\lambda \in K) \Rightarrow \mathrm{a} = \langle z / w \rangle = 0 \Leftrightarrow z \perp w.$$

Μένει να αποδειχθεί η *Τριγωνική Ανισότητα*. Αυτή είναι συνέπεια της *Ανισότητας Schwarz*, αφού:

$$\|z+w\| \le \|z\| + \|w\| \Leftrightarrow \|z+w\|^2 \le (\|z\| + \|w\|)^2$$

$$\Leftrightarrow \langle z+w / z+w \rangle \le \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\|z\|\,\|w\|$$

$$\Leftrightarrow \|z\|^2 + \|w\|^2 + \langle z / w \rangle + \overline{\langle z / w \rangle} \le \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\|z\|\,\|w\|$$

$$\Leftrightarrow 2\ \mathrm{Re}\langle z / w \rangle \le 2\ \|z\|\,\|w\|,$$

και, όπως είναι γνωστό:

$$\mathrm{Re}\langle z / w \rangle \le |\langle z / w \rangle|.$$

Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι τώρα πλήρης. ■

Ένα υποσύνολο U του Ευκλείδειου χώρου $\boldsymbol{K}^n$ λέγεται ***ανοικτό***, εάν κάθε στοιχείο $z \in U$ έχει περιοχή $\{\zeta \in \boldsymbol{K}^n : d(z,\zeta) < \varepsilon\}$ που περιέχεται ολόκληρη στο *U*.

Ένα υποσύνολο E του $\boldsymbol{K}^n$ λέγεται ***κλειστό***, εάν το συμπλήρωμά του $(\boldsymbol{K}^n - E)$ είναι ανοικτό. Η χαρακτηριστική ιδιότητα ενός κλειστού συνόλου E είναι ότι περιέχει όλα τα σημεία στα οποία συσσωρεύονται στοιχεία του: με άλλα λόγια, εάν $(z^{(m)} \in E : m \in \boldsymbol{N})$ είναι μία ακολουθία στοιχείων του E που συγκλίνει, ως προς την Ευκλείδεια απόσταση, σε ένα σημείο $z \in \boldsymbol{K}^n$, τότε το *z* ανήκει στο E.

Ένα υποσύνολο E του $\boldsymbol{K}^n$ λέγεται ***κυρτό***, εάν $\alpha \cdot E + (1-\alpha)\cdot E \subset E \qquad (0 \le \alpha \le 1)$, δηλαδή εάν $[\alpha \cdot z + (1-\alpha)\cdot w] \in E$, για κάθε $z, w \in E$ και $\alpha \in [0,1]$.

Θεώρημα Ι.3.3.2. ***Κάθε μη κενό κλειστό κυρτό σύνολο $E \subset \boldsymbol{K}^n$ περιέχει ένα μοναδικό στοιχείο z ελάχιστης νόρμας.***

Απόδειξη. Η *Απόδειξη* είναι ευθεία συνέπεια του *Κανόνα του Παραλληλογράμμου*:

$$\|z+w\|^2 + \|z-w\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2 \quad (z \in \boldsymbol{K}^n, w \in \boldsymbol{K}^n),$$

ο οποίος με την σειρά του προκύπτει από τον ορισμό $\|z\|^2 = \langle z / z \rangle$.

Θέτουμε:

$$d := \inf\{\|z\| : z \in E\},$$

και επιλέγουμε $z^{(m)} \in E$ έτσι ώστε $\|z^{(m)}\| \to d$. Επειδή

$$\frac{1}{2}\left(z^{(m)} + z^{(k)}\right) \in E,$$

θα είναι $\|z^{(m)} + z^{(k)}\|^2 \geq 4d^2$.

Εάν στον *Κανόνα του Παραλληλόγραμμου* τα z και w αντικατασταθούν με τα $z^{(m)}$ και $z^{(k)}$, τότε το δεξιό μέρος της ισότητας θα τείνει προς το $4d^2$. Συνδυασμός των δύο τελευταίων συλλογισμών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία $(z^{(m)} \in E : m \in \boldsymbol{N})$ είναι *Cauchy*, υπό την έννοια ότι οι αποστάσεις $\|z^{(m)} - z^{(k)}\|$ των στοιχείων της μικραίνουν απεριόριστα.

Από την πληρότητα του $\boldsymbol{K}^n$, η συγκεκριμένη ακολουθία τείνει σε ένα στοιχείο $z \in \boldsymbol{K}^n$ τέτοιο ώστε $\|z\| = d$, και, από την κλειστότητα του E, το *z* ανήκει στο E. Εάν υπήρχε και δεύτερο σημείο $w \in E$ τέτοιο ώστε $\|w\| = d$, τότε η ακολουθία $(z, w, z, w, \ldots)$ θα έπρεπε να

συγκλίνει (σύμφωνα με τα όσα προηγήθηκαν), οπότε θα έπρεπε $w = z$, γεγονός που δείχνει την μοναδικότητα του στοιχείου z. ■

Θεώρημα Ι.3.3.3. ***Εάν M είναι κλειστός υπόχωρος του K^n τότε:***

$$K^n = M \oplus M^{\perp}.$$

Επεξηγηματικότερα, το συμπέρασμα είναι ότι ***τα σύνολα M και $M^{\perp}$ είναι κλειστοί διανυσματικοί υπόχωροι του K^n, με τομή $M \cap M^{\perp}$ το μονοσύνολο {0} και με άθροισμα $M + M^{\perp}$ ίσο με K^n.*** Ο χώρος $M^{\perp}$ καλείται ***ορθογώνιο συμπλήρωμα*** του M.

Απόδειξη. Εάν $E \subset K^n$, η γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου $\langle z / w \rangle$, σαν συνάρτηση του *z*, δείχνει ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα $E^{\perp}$ του *E* είναι πράγματι υπόχωρος του K^n. Τότε, η *Ανισότητα Schwarz* συνεπάγεται την κλειστότητα του $E^{\perp}$.

Εάν $z \in M$ και $z \in M^{\perp}$, τότε $\langle z / z \rangle = 0$. Επομένως *z*=0 και συνεπώς $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Εάν $z \in K^n$, τότε μία εφαρμογή του *Θεωρήματος Ι.3.3.2* για το κλειστό κυρτό σύνολο $(z - M)$ δείχνει ότι υπάρχει $\tilde{z} \in M$ που ελαχιστοποιεί την νόρμα $\|z - \tilde{z}\|$.

Θέτουμε $\tilde{\tilde{z}} := z - \tilde{z}$.

Τότε, $\|\tilde{\tilde{z}}\| \le \|\tilde{\tilde{z}} + w\|$ για κάθε $w \in M$. Από το *Θεώρημα Ι.3.3.2* έπεται ότι $\tilde{\tilde{z}} \in M^{\perp}$.

Επειδή $z = \tilde{z} + \tilde{\tilde{z}}$, δείξαμε ότι $M + M^{\perp} = K^n$, και η *Απόδειξη* είναι πλήρης. ■

Πόρισμα Ι.3.3.4. ***Εάν M είναι κλειστός υπόχωρος του K^n, τότε:***

$$(M^{\perp})^{\perp} = M .$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $M = (M^{\perp})^{\perp}$ είναι προφανής. Επειδή

$$M \oplus M^{\perp} = K^n = M^{\perp} \oplus (M^{\perp})^{\perp},$$

ο *M* δεν μπορεί να είναι γνήσιος υπόχωρος του $(M^{\perp})^{\perp}$. Άρα $M = (M^{\perp})^{\perp}$. ■

Τέλος, για όψιμη χρήση, θα αποδείξουμε την ακόλουθη *Πρόταση*:

Πρόταση Ι.3.3.5. ***Εάν ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία $a_{i,j} \in K$, τότε για κάθε $z \in K^n$ ισχύει:***

$$\|A \cdot z\|^2 = \langle z / A^T \cdot A \cdot z \rangle .$$

Απόδειξη. Εάν $A = (a_{i,j})$, τότε:

$$\langle z / A^T \cdot A \cdot z \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \, (A^T \cdot A \cdot z)_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i \, (\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \, a_{k,j} \cdot z_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i \, (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot z_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot (A \cdot z)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} z_i \, a_{i,k} \cdot (A \cdot z)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A \cdot z)_k \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \cdot z_i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A \cdot z)_k \, (A \cdot z)_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(A \cdot z)_k]^2$$

$$= \langle A \cdot z / A \cdot z \rangle$$

$$= \|A \cdot z\|^2 . \ \blacksquare$$

I.3.4. ΟΡΘΟΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ SCHMIDT

Τα στοιχεία της κανονικής βάσης $\{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ του K^n είναι, ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\langle e^{(i)} / e^{(j)} \rangle = 0 \qquad (i \neq j).$$

Επί πλέον, για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$, ισχύει:

$$\langle e^{(i)} / e^{(i)} \rangle = \|e^{(i)}\| = 1 .$$

Γενικότερα, κάθε K-βάση $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$ του K^n που είναι τέτοια ώστε:

$$\langle u^{(i)} / u^{(j)} \rangle \neq 0 \ (i \neq j) \quad \text{και} \quad \langle u^{(i)} / u^{(i)} \rangle = \|u^{(i)}\| = 1 \ (\forall i)$$

λέγεται ***ορθοκανονική*** K ***-βάση***.

Στην συνέχεια, θα συζητήσουμε το πρόβλημα της μετατροπής μίας τυχαίας K -βάσης $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ του K^n σε ορθοκανονική $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$.

Θα κατασκευάσουμε την καινούργια βάση επαγωγικά, χρησιμοποιώντας τη ***Μέθοδο Ορθογωνοποίησης Schmidt***.

Προς τούτο, θέτουμε $w^{(1)} := z^{(1)}$, και θεωρούμε ότι τα διανύσματα $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(j-1)}$ είναι γνωστά και τέτοια ώστε $\langle w^{(j)} / w^{(i)} \rangle = 0$ για κάθε $k \neq i$ με $1 \leq k, i \leq j-1$.

Επιθυμούμε την κατασκευή ενός διανύσματος $w^{(j)}$, έτσι ώστε η σχέση ορθογωνιότητας να επαληθεύεται μέχρι και τον δείκτη *j*. Εκφράζουμε το προς αναζήτηση διάνυσμα $w^{(j)}$ υπό την μορφή:

$$w^{(j)} = a_1 \cdot w^{(1)} + \ldots + a_{j-1} \cdot w^{(j-1)} + z^{(j)},$$

όπου τα $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$ θα πρέπει να επαληθεύουν τη σχέση:

$$a_1 \langle w^{(1)} / w^{(i)} \rangle + a_2 \langle w^{(2)} / w^{(i)} \rangle + \ldots + a_{j-1} \langle w^{(j-1)} / w^{(i)} \rangle = -\langle z^{(j)} / z^{(i)} \rangle$$

για κάθε $i = 1, \ldots, j-1$, κι επειδή $\langle w^{(k)} / w^{(i)} \rangle = 0$ για $k \neq i$, θα πρέπει:

$$a_i = -\frac{\langle z^{(j)} / z^{(i)} \rangle}{\langle w^{(i)} / w^{(i)} \rangle},$$

για κάθε $i = 1, \ldots, j-1$.

Οι τελευταίες αυτές σχέσεις προσδιορίζουν πλήρως το διάνυσμα $w^{(j)}$:

$$w^{(j)} = z^{(j)} + \sum_{i=1}^{j-1} -\frac{\langle z^{(j)} / z^{(i)} \rangle}{\langle w^{(i)} / w^{(i)} \rangle} . w^{(i)}.$$

Είναι τώρα φανερό πως η νέα K-βάση $\{w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}\}$ στοιχείων του K^n περιέχει στοιχεία ανά δύο ορθογώνια.

Απομένει η μετατροπή αυτής της νέας βάσης σε ορθοκανονική βάση. Προς τούτο, θέτουμε:

$$u^{(j)} := \frac{w^{(j)}}{\langle w^{(j)} / w^{(j)} \rangle^{1/2}} \ (\ j = 1,2,\ldots,n \ ).$$

Επειδή $\langle u^{(j)} / u^{(j)} \rangle = 1$ για κάθε $j = 1,2,\ldots,n$, η βάση $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$ είναι ορθοκανονική. ■

Αντιστρόφως, ισχύει το εξής :

Θεώρημα Ι.3.4.1. ***Εάν τα μη μηδενικά διανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(k)}$ είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, τότε είναι K-γραμμικά ανεξάρτητα.***

Απόδειξη. Εάν $a_1, a_2, \ldots, a_k$ είναι κάποιοι αριθμοί του K τέτοιοι ώστε:

$$a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_k \cdot z^{(k)} = 0,$$

τότε, για κάθε $j = 1,2,\ldots,k$, θα ισχύει:

$$a_1 \langle z^{(1)} / z^{(j)} \rangle + a_2 \langle z^{(2)} / z^{(j)} \rangle + \ldots + a_k \langle z^{(k)} / z^{(j)} \rangle = -\langle 0 / z^{(j)} \rangle$$
$$\Leftrightarrow a_1 \langle z^{(1)} / z^{(j)} \rangle + a_2 \langle z^{(2)} / z^{(j)} \rangle + \ldots + a_k \langle z^{(k)} / z^{(j)} \rangle = 0.$$

Επειδή $\langle z^{(i)} / z^{(j)} \rangle = 0$ για $i \neq j$, θα είναι $a_j \langle z^{(j)} / z^{(j)} \rangle = 0$. Καθώς μάλιστα είναι $z^{(j)} \neq 0$, θα ισχύει αναγκαστικά:

$$a_j = 0$$

για κάθε $j = 1,2,\ldots,k$. Η *Απόδειξη* είναι τώρα πλήρης. ■

Ι.3.5. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Έστω f μία K-γραμμική απεικόνιση από το K^n στο K^n.

Έχουμε δει ότι σε κάθε $z \in K^n$, η f αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο του K^n που συμβολίζεται με $f(z)$. Το $f(z)$ ονομάζεται ***εικόνα του*** z ***μέσω της*** f. Στη συγκεκριμένη *Παράγραφο*, θα εξετάσουμε το αντίστροφο πρόβλημα: δοθέντος ενός σημείου $w \in K^n$, *ποιές είναι οι συνθήκες, που πρέπει να ικανοποιούνται από την* f, *ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός μοναδικού* $z \in K^n$ *τέτοιου* ώστε $f(z) = w$;

Σε τέτοια περίπτωση, θα λέμε ότι η f είναι μία γραμμική ***αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση*** του K^n μέσα στον εαυτό του, και θα γράφουμε:

$$z = f^{-1}(w).$$

Η κατ' αυτόν τον τρόπο οριζόμενη συνάρτηση $f^{-1} : \mathrm{w} \mapsto z$ θα καλείται η ***αντίστροφη απεικόνιση*** *της* f.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η f^{-1} είναι επίσης γραμμική απεικόνιση. Προς τούτο, θα εισάγουμε κατ'αρχάς την έννοια του ***πυρήνα*** της f. Ο πυρήνας $Ker(f)$ της f ορίζεται ως το

σύνολο όλων των στοιχείων z του K^n που μεταφέρονται μέσω της f στο μηδενικό διάνυσμα 0 του K^n:

$$Ker(f) := \{z \in K^n : f(z) = 0\}.$$

(Κάποιες φορές, ο πυρήνας $Ker(f)$ συμβολίζεται και με $f^{-1}(0)$.

Έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα Ι.3.5.1. ***Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη, προκειμένου η γραμμική απεικόνιση f να είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι ο πυρήνας $Ker(f)$ της f να ισούται με το μονοσύνολο $\{0\}$, δηλαδή:***

$$Ker(f) = \{0\}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης, η συνθήκη $Ker(f) = \{0\}$ είναι αναγκαία.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $Ker(f) = \{0\}$. Τότε, θα δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή ότι για κάθε ζευγάρι z και w σημείων του K^n τέτοιων ώστε $z \neq w$ ισχύει $f(z) \neq f(w)$.

Πραγματικά, εάν ήταν $f(z) = f(w)$ τότε, λόγω της γραμμικότητας της f, θα ήταν $0 = f(z) - f(w) = f(z - w)$,

και επομένως

$$(z - w) \in Ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow z - w = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow z = w.$$

Συνεπώς, η συνθήκη $Ker(f)=\{0\}$ είναι ικανή να εξασφαλίσει το αμφιμονοσήμαντο της γραμμικής απεικόνισης f και η *Απόδειξη* ολοκληρώθηκε. ■

Πόρισμα Ι.3.5.2. ***Εάν η $f:K^n \to K^n$ είναι K-γραμμική αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, τότε και η αντίστροφή της απεικόνιση f^{-1} είναι K-γραμμική.***

Απόδειξη. Θέτουμε $w=f(z)$ και $v=f(u)$. Τότε,

$$f^{-1}(w+v)=f^{-1}(f(z)+f(u))=f^{-1}(f(z+u))=z+u=f^{-1}(w)+f^{-1}(v).$$

Ομοίως, εαν $a\in K$ τότε

$$f^{-1}(a\cdot w)=f^{-1}((a\cdot f(z))=f^{-1}(f(a\cdot z))=a\cdot z=a\cdot f^{-1}(w).\ ■$$

Περαιτέρω, θα εξετάσουμε μια συνθήκη που αφορά την f και που εγγυάται τον εκφυλισμό του πυρήνα της στο μονοσύνολο $\{0\}$:

Θεώρημα Ι.3.5.3. ***Έστω $\{z^{(1)},z^{(2)},\dots,z^{(n)}\}$ μία K-βάση του K^n. Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη, προκειμένου ο πυρήνας $Ker(f)$ μίας K-γραμμικής απεικόνισης f να είναι το μονοσύνολο $\{0\}$, είναι η K-γραμμική ανεξαρτησία των***

$$f(z^{(1)}),f(z^{(2)}),\dots,f(z^{(n)}).$$

Απόδειξη. Η συνθήκη είναι αναγκαία, γιατί εάν υποθέσουμε ότι υπήρχαν μη μηδενικοί αριθμοί του K $a_1, a_2, \ldots, a_n$ τέτοιοι ώστε

$$a_1 \cdot f(z^{(1)}) + \ldots + a_n \cdot f(z^{(n)}) = 0 = f^{-1}(0),$$

θα είχαμε επίσης

$$a_1 \cdot z^{(1)} + a_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + a_n \cdot z^{(n)} = 0$$

(λόγω της K -γραμμικότητας της f).

Αυτή η σχέση θα σήμαινε ότι τα στοιχεία $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ της K –βάσης $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ είναι K –γραμμικά εξαρτημένα και που είναι, φυσικά, άτοπη. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $f(z^{(1)}), f(z^{(2)}), \ldots, f(z^{(n)})$ είναι K –γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, κάθε σχέση του τύπου $a_1 \cdot f(z^{(1)}) + \ldots + a_n \cdot f(z^{(n)}) = 0$ συνεπάγεται ότι $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$. Έτσι, εάν υπήρχε $w \in K^n - \{0\}$ τέτοιο ώστε $w \in Ker(f) = f^{-1}(0)$ θα ήταν και

$$\begin{aligned} w \in f^{-1}(0) &= f^{-1}\left(a_1 \cdot f\left(z^{(1)}\right) + \cdots + a_n \cdot f\left(z^{(n)}\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(f\left(a_1 \cdot z^{(1)} + \cdots + a_n \cdot z^{(n)}\right)\right) \\ &= \{a_1 \cdot z^{(1)} + \cdots a_n \cdot z^{(n)}\} \\ &= \{0 \cdot z^{(1)} + \cdots + 0 \cdot z^{(n)}\} \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

δηλαδή $w = 0$, που είναι άτοπο.■

Παρατήρηση Ι.3.5.4. Όταν η K –γραμμική απεικόνιση f δεν είναι αντιστρέψιμη, ο διανυσματικός χώρος $f(K^n) = \{w \in K^n : \exists\, z \in K^n$ *με* $f(z) = w\}$ *εικόνα της* f, ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $f(z^{(1)}),\ldots,f(z^{(n)})$ (σύμφωνα με το προηγούμενο *Θεώρημα*), δεν είναι ολόκληρο το K^n. Ονομάζουμε ***τάξη*** της απεικόνισης την K –διάσταση του $f(K^n)$. Κατά συνέπεια, *μία αναγκαία και ικανή συνθήκη, για να είναι η* f *αμφινομοσήμαντη, είναι η τάξη της* f *να ισούται με* n. ■

Ι.3.6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Έστω f μία αμφιμονοσήμαντη K –γραμμική απεικόνιση του K^n μέσα στον εαυτό του. Τότε, για κάθε $z \in K^n$, είναι:

$$f\left(f^{-1}(z)\right) = z \text{ και } f^{-1}\left(f(z)\right) = z\,.$$

Έστω τώρα ο πίνακας $A = (a_{i,j})$ που αντιστοιχεί στην f και συμβολίζουμε με A^{-1} τον πίνακα που αντιστοιχεί στην f^{-1}.

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στη (γραμμική) *ταυτοτική απεικόνιση* $id : K^n \to K^n : z \mapsto id(z) \equiv z$ είναι ο μοναδιαίος Ι, που έχουμε ήδη συναντήσει. Σύμφωνα με την *Παράγραφο Ι.2.3* αλλά και με την προηγούμενη, θα έχουμε:

$$A \cdot A^{-1} = \mathrm{I} \qquad \text{και} \qquad A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}\,.$$

Ο πίνακας A^{-1} λέγεται ***αντίστροφος πίνακας*** του A. Ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα Ι.3.6.1. ***Έστω A είναι ένας πίνακας, του οποίου οι στήλες είναι διανύσματα K-γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, υπάρχει ένας μοναδικός $n \times n$ πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε:***

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}.$$

Θα λέμε, σ΄ αυτήν την περίπτωση, ότι ***ο A είναι αντιστρέψιμος*** ή ***κανονικός*** ή ***ομαλός***. Στην αντίθετη περίπτωση, θα λέμε ότι ***ο A είναι μη αντιστρέψιμος*** ή ***μη κανονικός*** ή ***ανώμαλος***.

Απόδειξη. Στην *Παράγραφο Ι.1.3* είδαμε ότι οι στήλες του πίνακα A είναι τα διανύσματα $f(\mathrm{e}^{(j)})$ για $j = 1,2,\ldots,n$.

Εάν τα διανύσματα αυτά είναι K–γραμμικά ανεξάρτητα, τότε η K–γραμμική απεικόνιση f είναι αμφιμονοσήμαντη, σύμφωνα με τα *Θεωρήματα Ι.3.5.1* και *Ι.3.5.3* της προηγούμενης *Παραγράφου*. Υπάρχει, συνεπώς, ένας πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}.$$

Αυτός ο πίνακας είναι ένας πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση f^{-1}. Απομένει να δειχθεί ότι αυτός ο πίνακας είναι ο μοναδικός που έχει την ιδιότητα

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}.$$

Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλος $n \times n$ πίνακας B με την ιδιότητα $A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{I}$. Τότε θα είχαμε $B \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot \mathrm{I} = B$, αλλά και $B \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = \left(B \cdot A\right) \cdot A^{-1} = \mathrm{I} \cdot A^{-1} = A^{-1}$, με αποτέλεσμα να συμβαίνει υποχρεωτικά $B = A^{-1}$. Η *Απόδειξη* ολοκληρώθηκε. ■

Ας δούμε τώρα ποιες είναι οι ιδιότητες του αντίστροφου πίνακα. Οι αποδείξεις τους είναι τυποποιημένα εύκολες και αφήνονται στην ευχέρεια του αναγνώστη :

1°) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

2°) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

3°) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$,

4°) $\left(\overline{A}\right)^{-1} = A^{-1}$,

5°) $\left(A^{*}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*}$,

6°) *εάν ο* A *είναι ερμιτιανός, τότε και ο* A^{-1} *είναι ερμιτιανός,*

7°) *εάν ο* A *είναι τριγωνικός, τότε και ο* A^{-1} *είναι τριγωνικός του ιδίου τύπου· επί πλέον, σ΄ αυτή την περίπτωση, τα στοιχεία της διαγωνίου του* A^{-1} *είναι οι αντίστροφοι των αντίστοιχων στοιχείων της διαγωνίου του* A (δηλαδή, εάν $A = (a_{i,j})$ και $A^{-1} = (a_{i,j})$ τότε

$$a_{i,i} = \frac{1}{a_{i,i}}),$$

8°) *το σύνολο των αντιστρέψιμων* $n \times n$ *πινάκων τάξης n συνιστά αλγεβρικό σώμα, ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης* $+$ *και του γινομένου* $\cdot$ *μεταξύ πινάκων.*

Ι.3.7. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Έστω f μία $\mathbb{K}$–γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{K}^n$ μέσα στον εαυτό του. Σ' αυτή την απεικόνιση αντιστοιχεί ένας πίνακας A.

Προφανώς, ο πίνακας A εξαρτάται από την επιλογή της $\mathbb{K}$–βάσης $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ του $\mathbb{K}^n$. (Πράγματι, κάθε διάνυσμα $z \in \mathbb{K}^n$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$z = \zeta_1 \cdot z^{(1)} + \zeta_2 \cdot z^{(2)} + \ldots + \zeta_n \cdot z^{(n)},$$

όπου $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ είναι οι συνιστώσες του z ως προς την $\mathbb{K}$–βάση $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$.

Από την $\mathbb{K}$–γραμμικότητα της f έπεται ότι

$$f(z) = \zeta_1 \cdot f(z^{(1)}) + \zeta_2 \cdot f(z^{(2)}) + \ldots + \zeta_n \cdot f(z^{(n)}).$$

Αυτό σημαίνει ότι η γνώση των διανυσμάτων $f(z^{(1)}), f(z^{(2)}), \ldots, f(z^{(n)})$ προσδιορίζει ακριβώς την γραμμική απεικόνιση f, υπό την έννοια ότι εάν διανύσματα $w_j = f(z^{(j)})$ είναι γνωστά, για $j = 1,2,\ldots,n$, τότε

$$f(z) = \zeta_1 \cdot w_1 + \zeta_2 \cdot w_2 + \ldots + \zeta_n \cdot w_n.$$

Αλλά και αντιστρόφως, εάν δοθούν n διανύσματα $w_j \in \mathbb{K}^n$, $(j = 1,2,\ldots,n)$, τότε η απεικόνιση:

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : z = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} \mapsto f(z) = \zeta_1 \cdot w_1 + \ldots + \zeta_n \cdot w_n$$

είναι $\mathbb{K}$–γραμμική. Έτσι, στην προκειμένη περίπτωση, $A = [f(z^{(j)})]_{\mathrm{i}}$.

Στην συνέχεια, θα δούμε πώς αυτή η $\boldsymbol{K}$-βάση $\{z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}\}$ μετασχηματίζεται σε μία καινούργια $\boldsymbol{K}$-βάση $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$ και θα εξετάσουμε την διαδικασία του ταυτόχρονου μετασχηματισμού του πίνακα A σε έναν πίνακα *B* ως προς την καινούργια βάση.

Είναι σαφές ότι μπορούμε να γράψουμε την νέα βάση σαν συνάρτηση της παλιάς:

$$u^{(1)} = t_{1,j} \cdot z^{(1)} + t_{2,j} \cdot z^{(2)} + \ldots + t_{n,j} \cdot z^{(n)} \text{ για } j = 1,2,\ldots,n.$$

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$T = (t_{i,j}).$$

Επειδή τα διανύσματα $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ συνιστούν μία $\boldsymbol{K}$-βάση, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι γραμμές του πίνακα T είναι διανύσματα $\boldsymbol{K}$-γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, σύμφωνα με το *Θεώρημα Ι.3.6.1*, ο πίνακας T είναι αντιστρέψιμος. Έστω τώρα τυχαία επιλεγμένο $z \in \boldsymbol{K}^n$. Τότε:

- ως προς την παλιά βάση: $z = \zeta_1 \cdot z^{(1)} + \ldots + \zeta_n \cdot z^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \cdot z^{(i)}$,
- ως προς την νέα βάση : $z = \eta_1 \cdot u^{(1)} + \ldots + \eta_n \cdot u^{(n)}$

$$\begin{aligned}
&= \eta_1 \cdot (t_{1,1} \cdot z^{(1)} + \ldots + t_{n,1} \cdot z^{(n)}) \\
&\quad + \eta_2 \cdot (t_{1,2} \cdot z^{(1)} + \ldots + t_{n,2} \cdot z^{(n)}) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \eta_n \cdot (t_{1,n} \cdot z^{(1)} + \ldots + t_{n,n} \cdot z^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\, \eta_j \right) \cdot z^{(i)}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$z=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\cdot z^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}t_{i,j}\,\eta_j\right)\cdot z^{(i)}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left[\zeta_i-\sum_{j=1}^{n}t_{i,j}\,\eta_j\right]\cdot z^{(i)}=0\,,$$

και από την K -γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων $z^{(1)},z^{(2)},z^{(3)},\ldots,z^{(n)}$ έπεται ότι:

$$\zeta_i=\sum_{j=1}^{n}t_{i,j}\eta_j\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

Θέτοντας:

$$\zeta:=\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_n\end{pmatrix}\qquad\text{και}\qquad\eta:=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},$$

η τελευταία γράφεται:

$$\zeta=T\cdot\eta\,.$$

Έστω τώρα $z'=f(z)$ η εικόνα του σημείου z μέσω της f. Έστω ακόμα:

$$\theta:=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix}\qquad\text{και}\qquad\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}$$

οι συνιστώσες του z' ως προς την παλιά και την καινούργια βάση, αντίστοιχα.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει

$$\theta=A\cdot\zeta\,,$$

ενώ επειδή $\theta=T\cdot\phi$ θα είναι

$$\phi=T^{-1}\cdot\theta\,,$$

και επομένως

$$\phi=T^{-1}\cdot A\cdot\zeta\,,\ \text{ή}\ \phi=\left(T^{-1}\cdot A\cdot T\right)\cdot\eta\,.$$

Η τελευταία αυτή σχέση περιγράφει πλήρως τη συμπεριφορά της γραμμικής απεικόνισης f ως προς τη νέα βάση $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}\}$: *κάθε σημείο* $z \in \boldsymbol{K}^n$, *με συνιστώσες* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)^T$ *ως προς τη νέα βάση, απεικονίζεται, μέσω της γραμμικής απεικόνισης* f, *στο σημείο* $z' \in \boldsymbol{K}^n$, *με συνιστώσες* ϕ *ως προς την νέα βάση.* Με άλλα λόγια, ενώ η γραμμική απεικόνιση f όταν εκφράζεται ως προς την παλιά βάση $\{z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}\}$ προσδιορίζεται από τον πίνακα A, η ίδια απεικόνιση όταν εκφράζεται ως προς την νέα βάση $\{u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}\}$ προσδιορίζεται από τον πίνακα

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T .$$

Ο πίνακας B *ονομάζεται* ***μετασχηματισμός του*** A ***μέσω του*** T. Λέμε ακόμη ότι ***οι πίνακες Α και Β είναι όμοιοι.***

Ι.4. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ι.4.1. ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στην παρούσα *Παράγραφο*, θα υπενθυμίσουμε σύντομα τον ορισμό της *ορίζουσας ενός πίνακα* καθώς και τις κύριες ιδιότητές της. Δεν πρόκειται να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες και, ειδικότερα, δεν θα αναφερθούμε στους τρόπους υπολογισμού μίας ορίζουσας.

Έστω $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}$ διανύσματα (n το πλήθος) του $\boldsymbol{K}^n$. Έστω ακόμα μία απεικόνιση $\det$ του $(\boldsymbol{K}^n)^n$ στο $\boldsymbol{K}$:

$$\det : (\boldsymbol{K}^n)^n \to \boldsymbol{K} ,$$

που αντιστοιχίζει στα διανύσματα $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}$ τον μοναδικό αριθμό $\det\left(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}\right)$ έτσι ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες :

1°) $\det\left(a \cdot w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}\right) = a \det\left(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}\right) \quad \forall a \in \boldsymbol{K}$,

2°) $\det\left(w^{(1)}, w^{(2)} + a \cdot w^{(1)}, w^{(3)} \ldots, w^{(n)}\right) = \det\left(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}\right) \quad \forall a \in \boldsymbol{K}$,

3°) $\det\left(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\right) = 1$,

και ανάλογες ιδιότητες εάν κανείς πολλαπλασιάσει, στις 1^0) και 2°), ένα άλλο διάνυσμα από το $w^{(1)}$ με έναν αριθμό $a \in \boldsymbol{K}$.

Εάν *A* είναι ο πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}$, θα λέμε ότι ο αριθμός $\det\left(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(n)}\right)$ είναι η ***ορίζουσα*** του *A* και θα συμβολίζεται με $\det(A)$.

Θυμίζουμε, χωρίς απόδειξη, τις ακόλουθες ιδιότητες :

1°) $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = \det(A)\det(B)$,

2°) $\det(a \cdot A) = a^n \det(A) \quad \forall a \in \boldsymbol{K}$,

3°) $\det(A) \neq 0$ *εάν και μόνον εάν ο* A *είναι αντιστρέψιμος,*

4°) $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$,

5°) *εάν ο* B *είναι όμοιος με τον* A *τότε* $\det(A) = \det(B)$,

6°) $\det(A) = \det\left(A^T\right)$.

Ι.4.2. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ CRAMER

Το περιεχόμενο της *Παραγράφου* αυτής αναφέρεται στη θεωρητική επίλυση του ακόλουθου προβλήματος: *Έστω μία* K *–γραμμική απεικόνιση* f *από το* K^n *στο* K^n *και έστω* b *ένα δοθέν διάνυσμα του* K^n. *Ζητείται να βρεθεί ένα* $z \in K^n$ *τέτοιο ώστε*:

$$f(z) = b\,.$$

Εφ' όσον η f είναι αμφιμονοσήμαντη, είναι ήδη γνωστό ότι η πιο πάνω εξίσωση επιδέχεται μοναδική λύση z :

$$z = f^{-1}(b).$$

Έστω $A = (a_{i,j})$ ο $n \times n$ πίνακας που αντιστοιχεί στην f. Τότε, η εξίσωση $f(z) = b$ γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή :

$$A \cdot z = b.$$

Μία τέτοια εξίσωση ονομάζεται ***γραμμικό σύστημα*** ή ακριβέστερα ***σύστημα γραμμικών εξισώσεων***. Πράγματι, η εξίσωση $A \cdot z = b.$ είναι μία συμπαγής και συνοπτική γραφή του ισοδύναμου προς αυτή συστήματος γραμμικών εξισώσεων :

$$a_{1,1} \cdot z_1 + a_{1,2} \cdot z_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot z_n = b_1$$

$$a_{2,1} \cdot z_1 + a_{2,2} \cdot z_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot z_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n,1} \cdot z_1 + a_{n,2} \cdot z_2 + \ldots + a_{n,n} \cdot z_n = b_n$$

όπου φυσικά:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Κάθε μία από τις εξισώσεις αυτού του συστήματος είναι γραμμική ως προς οποιοδήποτε άγνωστο $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Όπως είναι γνωστό, εάν η f είναι αμφιμονοσήμαντη τότε ο πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση f^{-1} είναι ο $n \times n$ πίνακας που συμβολίζεται με A^{-1} και που είναι τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}$.

Προφανώς, σε μία τέτοια περίπτωση, το γραμμικό σύστημα $A \cdot z = b$ γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή :

$$z = A^{-1} \cdot b.$$

Ένα τέτοιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται ***σύστημα Cramer***. Επίλυση αυτού του συστήματος σημαίνει εύρεση του διανύσματος $z \in K^n$, δηλαδή εύρεση των συνιστωσών του $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Ας συμβολίσουμε με $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}$ τα διανύσματα στήλες του πίνακα A :

$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \quad \text{για } j = 1,2,\ldots,n,$$

και ας θεωρήσουμε την ορίζουσα $\det\left(a^{(1)}, \ldots, a^{(j-1)}, b, a^{(j+1)}, \ldots, a^{(n)}\right)$. Τότε, με γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών, βρίσκουμε ότι αυτή η ορίζουσα είναι ίση με την ορίζουσα :

$$\det\left(a^{(1)},\ldots,a^{(j-1)},\left[b-z_i\cdot a^{(1)}-\ldots-z_{j-1}\cdot a^{(j-1)}-z_{j+1}\cdot a^{(j+1)}-\ldots-z_n\cdot a^{(n)}\right],a^{(j+1)},\ldots,a^{(n)}\right)$$
$$=\det\left(a^{(1)},\ldots,a^{(j-1)},z_j\cdot a^{(j)},a^{(j+1)},\ldots,a^{(n)}\right)$$
$$=z_j\cdot\det\left(a^{(1)},\ldots,a^{(j-1)},a^{(j)},a^{(j+1)},\ldots,a^{(n)}\right)$$
$$=z_j\cdot\det(A) \text{ για } j=1,2,\ldots,n.$$

Άρα, τελικά, ισχύει:

$$\det\left(a^{(1)},\ldots,a^{(j-1)},b,a^{(j+1)},\ldots,a^{(n)}\right)=z_j\cdot\det(A), \text{ για } j=1,2,\ldots,n.$$

Από αυτή τη σχέση συνεπάγεται ότι η τιμή του z_j δίνεται από τον *Τύπο*:

$$z_j=\frac{\det\left(a^{(1)},\ldots,a^{(j-1)},b,a^{(j+1)},\ldots,a^{(n)}\right)}{\det(A)}$$

για κάθε $j=1,2,\ldots,n$, επειδή $\det(A)\neq 0$ αφού ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Εάν $b=0$ και εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε η μοναδική λύση του συστήματος:

$$A\cdot z=0$$

είναι το διάνυσμα $z=0\in K^n$.

Αντιστρόφως, εάν το σύστημα $A\cdot z=0$ έχει μία λύση $z\neq 0$ τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι, κατ' ανάγκη, $\det(A)=0$, δηλαδή ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ι.5. ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ι.5.1. ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός Ι.5.1.1. ***Έστω ότι A είναι ένας $n\times n$ πίνακας. Λέμε ότι το $\lambda\in K$ είναι μία***

ιδιοτιμή του A ***και ότι το*** $z \in K^n$ ***είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα εάν:***

$$z \neq 0 \text{ και } A.z = \lambda.z \,. \blacksquare$$

Είναι σαφές ότι η εξίσωση $A \cdot z = \lambda \cdot z$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί υπό την μορφή

$$(A - \lambda \cdot \mathrm{I}) \cdot z = 0,$$

κι επειδή έχει υποτεθεί ότι $z \neq 0$, η τελευταία σημαίνει ότι το λ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\det(A - \lambda \cdot \mathrm{I}) = 0.$$

Προφανώς, το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{I})$είναι ένα πολυώνυμο ως προς λ. Πράγματι, εάν $A = (a_{i,j})$ τότε:

$$\det(A - \lambda \cdot \mathrm{I}) = \det\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Αυτό το πολυώνυμο ονομάζεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** *του* A, ενώ η εξίσωση $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{I}) = 0$ λέγεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** *του πίνακα* A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι βαθμού n και οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές του A.

Για απλοποίηση, θα συμβολίζουμε με

$$P_n(\lambda) \text{ ή με } P(\lambda)$$

αυτό το πολυώνυμο.

Όπως προκύπτει εύκολα, ισχύει ότι:

$$P_n(\lambda) = P(\lambda) = det(A - \lambda \cdot \mathrm{I}) = (-1)^n \cdot \lambda^n + \ldots + \textit{σταθερός όρος}.$$

Εξ άλλου, σύμφωνα με το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*, το πλήθος όλων των ριζών του πολυωνύμου $P(\lambda)$ είναι ίσο με n. Συνεπώς, ***ένας πίνακας τάξης n επιδέχεται το πολύ n διάφορες ιδιοτιμές.***

Τα ιδιοδιανύσματα ενός τέτοιου πίνακα δεν μπορούν κι αυτά να ξεπερνούν σε πλήθος τον αριθμό n, υπό την έννοια ότι εάν $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ του A, τότε κάθε άλλο ιδιοδιάνυσμα του A θα είναι αριθμητικό πολλαπλάσιο κάποιου από τα $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$. Πράγματι, εάν λ_j είναι μία ιδιοτιμή του A και εάν $v^{(j)}$ είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε και κάθε αριθμητικό πολλαπλάσιο $c \cdot v^{(j)} \left(c \in \boldsymbol{K}\right)$ του $v^{(j)}$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του A, γιατί:

$$A \cdot (c \cdot v^{(j)}) = c \cdot A \cdot v^{(j)} = c\, \lambda_j \cdot v^{(j)} = \lambda_j \cdot (c \cdot v^{(j)}).$$

Επίσης,

$$A^2 \cdot z = A \cdot (A \cdot z) = A \cdot (\lambda \cdot z) = \lambda \cdot (A \cdot z) = \lambda \cdot (\lambda \cdot z) = \lambda^2 \cdot z$$

και γενικότερα,

$$A^{\kappa} \cdot z = \lambda^{\kappa} \cdot z,$$

που δείχνει ότι ***εάν λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε το λ^{κ} είναι ιδιοτιμή του A^{κ}. Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι, και στις δύο περιπτώσεις, το διάνυσμα z.***

Σε ό,τι ακολουθήσει, θα συμβολίζουμε με:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

τις ιδιοτιμές του A (διάφορες ή όχι μεταξύ τους) και με:

$$v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}$$

τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A (το κάθε ένα από αυτά θεωρείται σαν αντιπρόσωπος της κατηγορίας όλων των αριθμητικών πολλαπλασίων κάποιου ιδιοδιανύσματος).

Ορισμός Ι.5.1.2. ***Ο μη αρνητικός αριθμός*** $\rho(A) = \max\{|\lambda_j| : j = 1,2,\ldots,n\}$ ***καλείται φασματική ακτίνα του*** A. ■

Η σημασία της έννοιας της φασματικής ακτίνας ενός τετραγωνικού πίνακα θα φανεί σε επόμενο *Κεφάλαιο*. Προς το παρόν, παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

Ι.5.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρόταση Ι.5.2.1. ***Ένας τετραγωνικός*** $n \times n$ ***πίνακας*** A ***και ο ανάστροφός του*** A^T ***έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.***

Απόδειξη. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα του A και του A^T είναι ταυτόσημα. Προκειμένου να γίνει αντιληπτός αυτός ο ισχυρισμός, αρκεί να αναπτυχθεί η ορίζουσα $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{I})$ κατά γραμμές και η ορίζουσα $\det(A^T - \lambda \cdot \mathrm{I})$ κατά στήλες. ■

Πρόταση Ι.5.2.2. ***Εάν*** $v^{(1)},\ldots,v^{(n)}$ ***και*** $u^{(1)},\ldots,u^{(n)}$ ***είναι τα ιδιοδιανύσματα των*** A ***και*** A^* ***αντίστοιχα, τότε:***

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \langle v^{(i)} / u^{(j)} \rangle = 0 .$$

Απόδειξη. Επειδή $A \cdot v^{(i)} = \lambda_i \cdot v^{(i)}$ και $A^* \cdot u^{(j)} = \overline{\lambda_j} \cdot u^{(j)}$, έχουμε:

$$\langle A^* \cdot u^{(j)} / v^{(i)} \rangle = \overline{\lambda_j}\, \langle u^{(j)} / v^{(i)} \rangle \text{ και } \langle A^* \cdot u^{(j)} / v^{(i)} \rangle = \overline{\lambda_j}\, \langle u^{(j)} / v^{(i)} \rangle ,$$

οπότε, αφαιρώντας κατά μέλη και κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι

$$\langle z / A \cdot w \rangle = \langle A^* \cdot z / w \rangle \quad \forall z \text{ και } w \in \boldsymbol{K}^n$$

διαπιστώνουμε πως:

$$0 = (\overline{\lambda_i} - \overline{\lambda_j})\, \langle u^{(j)} / v^{(i)} \rangle,$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη*, εφ' όσον υποτεθεί ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$. ■

Πρόταση Ι.5.2.3. ***Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα*** A ***είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο διάφορες ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.***

Απόδειξη. Επειδή $A \cdot v^{(i)} = \lambda_i \cdot v^{(i)}$ θα είναι και

$$\langle A \cdot v^{(i)} / v^{(i)} \rangle = \langle \lambda_i \cdot v^{(i)} / v^{(i)} \rangle = \lambda_i\, \langle v^{(i)} / v^{(i)} \rangle ,$$

αλλά και επίσης:

$$\langle v^{(i)} / A.v^{(i)} \rangle = \langle v^{(i)} / \lambda_i \cdot v^{(i)} \rangle = \overline{\lambda_i}\, \langle v^{(i)} / v^{(i)} \rangle = \langle A^* \cdot v^{(i)} / v^{(i)} \rangle = \langle A \cdot v^{(i)} / v^{(i)} \rangle ,$$

αφού $A = A^*$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$, γιατί $\langle v^{(i)} / v^{(i)} \rangle \neq 0$, και επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

Όμοια, έχουμε:

$$\langle A \cdot v^{(i)} / v^{(j)} \rangle = \lambda_i \langle v^{(i)} / v^{(j)} \rangle ,$$

αλλά και

$$\langle v^{(i)} / A^* \cdot v^{(j)} \rangle = \langle A \cdot v^{(i)} / v^{(j)} \rangle = \lambda_j \langle v^{(i)} / v^{(j)} \rangle .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$ παίρνουμε $\langle v^{(i)} / v^{(j)} \rangle = 0$. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ιδιότητα που περιγράφεται από την προηγούμενη *Πρόταση*, γιατί $u^{(i)} = v^{(i)}$. ■

Πρόταση Ι.5.2.4. ***Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ο $n \times n$ πίνακας A αντιστρέψιμος είναι να μην έχει μηδενική ιδιοτιμή.***

Απόδειξη. Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του *A* ισούται με την ορίζουσα $\det(A)$ του A. Χρησιμοποιώντας τις *Σχέσεις Vieta* μεταξύ ριζών και συντελεστών ενός πολυωνύμου, έχουμε $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, που αποδεικνύει την *Πρόταση*. ■

Πρόταση Ι.5.2.5. ***Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και εάν λ είναι μία ιδιοτιμή του A $(\lambda \neq 0)$, τότε ο αριθμός $\frac{1}{\lambda}$ είναι μία ιδιοτιμή του A^{-1}.***

Απόδειξη. Εάν $A \cdot z = \lambda \cdot z$, τότε

$$A^{-1} \cdot (A \cdot z) = A^{-1} \cdot (\lambda \cdot z) \Leftrightarrow z = \lambda \cdot A^{-1} \cdot z \Leftrightarrow \lambda^{-1} \cdot z = A^{-1} \cdot z,$$

ισότητα που δείχνει ότι ο αριθμός $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}. (Παρατηρήστε ότι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το ίδιο.) ■

Πρόταση Ι.5.2.6. ***Για κάθε αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα T, οι πίνακες***

$$A \text{ και } B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

Ακόμα, εάν το z είναι ιδιοδιάνυσμα του A, τότε το $w = T^{-1} \cdot z$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B. Τόσο το z όσο και το w αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή.

Απόδειξη. Εάν $B \cdot w = \lambda \cdot w$, τότε $T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot w = \lambda \cdot w$, και συνεπώς

$$A \cdot T \cdot w = \lambda \cdot T \cdot w,$$

που αποδεικνύει την *Πρόταση*, εφ' όσον τεθεί $z = T \cdot w$. ■

Πρόταση Ι.5.2.7. ***Εάν όλες οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A είναι διάφορες ανά δύο, τότε τα ιδιοδιανύσματα του A συνιστούν μία βάση του K^n.***

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι:

$$a_1 \cdot v^{(1)} + a_2 \cdot v^{(2)} + \ldots + a_n \cdot v^{(n)} = 0$$

για κάποιους μιγαδικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Τότε:

$$a_1 \cdot A \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n \cdot A \cdot v^{(n)} = a_1 \lambda_1 \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n \lambda_n \cdot v^{(n)} = 0,$$

και ομοίως:

$$a_1 \lambda_1^{\kappa} \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n \lambda_n^{\kappa} \cdot v^{(n)} = 0$$

για οποιοδήποτε $\kappa = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Ας θεωρήσουμε τα πολυώνυμα :

$$Q_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

$$Q_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

.....

$$Q_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_{i-1})\,(\lambda - \lambda_{i+1})\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

.....

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_{n-1}).$$

Όλα αυτά τα πολυώνυμα έχουν βαθμό ίσο με $n-1$. Είναι λοιπόν σαφές ότι μπορούν να γραφούν και υπό την μορφή:

$$Q_i(\lambda) = \beta_{i,n-1}\,\lambda^{n-1} + \beta_{i,n-2}\,\lambda^{n-2} + \ldots + \beta_{i,1}\,\lambda + \beta_{i,0}$$

με $Q_i(\lambda_j) = 0 \;\; (i \neq j)$ και $Q_i(\lambda_i) \neq 0$. Έχουμε:

$$0 = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \beta_{i,\kappa} \cdot (a_1\,\lambda_1^{\kappa} \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n\,\lambda_n^{\kappa} \cdot v^{(n)}),\ \text{για}\ i = 1,\ldots,n$$

ή επίσης:

$$0 = a_1\,Q_i(\lambda_1)\cdot v^{(1)} + \cdots + a_n\,Q_i(\lambda_n)\cdot v^{(n)},\ \text{για}\ i = 1,\ldots,n$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$0 = a_i\,Q_i(\lambda_i)\cdot v^{(i)},\ \text{για}\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Η τελευταία αυτή σχέση συνεπάγεται ότι:

$$a_i = 0,\ \text{για}\ i = 1,2,\ldots,n,$$

και, κατά συνέπεια, αποδεικνύει ότι τα ιδιοδιανύσματα $v^{(1)},\ldots,v^{(n)}$ είναι K–γραμμικά ανεξάρτητα και άρα συνιστούν μία K–βάση του K^n. (Όμοια, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε δύο διάφορες ιδιοτιμές είναι οπωσδήποτε γραμμικά ανεξάρτητα. Αυτό ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που οι ιδιοτιμές είναι πολλαπλές). ■

Πρόταση Ι.5.2.8. ***Εάν οι ιδιοτιμές του τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα A είναι όλες διάφορες ανά δύο, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας:***

$$T^{-1} \cdot A \cdot T$$

να είναι διαγώνιος. Τα στοιχεία της διαγωνίου αυτού του πίνακα είναι οι ιδιοτιμές του A.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την *Πρόταση Ι.5.2.7*, εάν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι όλες ανά δύο διάφορες, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A συνιστούν μία βάση του $\boldsymbol{K}^n$. Κάθε διάνυσμα z του $\boldsymbol{K}^n$ μπορεί λοιπόν να γραφεί σαν $\boldsymbol{K}$–γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της $\boldsymbol{K}$–βάσης που συνιστούν τα ιδιοδιανύσματα του A:

$$z = a_1 \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n \cdot v^{(n)} \ \ (a_j \in \boldsymbol{K}).$$

Άρα, και το διάνυσμα $w = A \cdot z \in \boldsymbol{K}^n$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$w = A \cdot z = a_1 \cdot A \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n \cdot A \cdot v^{(n)}$$

είτε:

$$w = a_1 \lambda_1 \cdot v^{(1)} + \cdots + a_n \lambda_n \cdot v^{(n)}.$$

Με άλλα λόγια, το διάνυσμα $w \in \boldsymbol{K}^n$ μπορεί να προκύψει από το $z \in \boldsymbol{K}^n$ σύμφωνα με τον μετασχηματισμό:

$$w = B \cdot z,$$

όπου:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \mathrm{O} \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, ως προς την $\boldsymbol{K}$-βάση των ιδιοδιανυσμάτων, η απεικόνιση f, που περιγράφεται από τον πίνακα A, αντιστοιχεί σε διαγώνιο πίνακα. Σύμφωνα με την *Παράγραφο Ι.3.7*, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Η διαπίστωση τούτη ολοκληρώνει την *Απόδειξη* της *Πρότασης*. ■

Θεώρημα Ι.5.2.9. (Cayley-Hamilton) $P(A)=0$. ■

Κατά το *Θεώρημα Cayley-Hamilton*, εάν αντικαταστήσουμε τον αριθμό λ του K με τον πίνακα A στην έκφραση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P(\lambda)$, τότε ο πίνακας $P(A)$, που λαμβάνεται κατ' αυτόν τον τρόπο, είναι ο μηδενικός πίνακας : Εάν $P(\lambda)=a_n\ \lambda^n+\cdots+a_1\ \lambda+a_0$, τότε

$$P(A)=a_n\cdot A^n+\cdots+a_1\cdot A+a_0\cdot \mathrm{I}=\mathrm{O}\,.$$

Δεν θα δώσουμε εδώ την απόδειξη αυτού του σημαντικού *Θεωρήματος*. Θα επισημάνουμε μόνον ότι δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο με αυτή την ιδιότητα.

Πρόταση Ι.5.2.10. ***Εάν ο πίνακας A είναι τριγωνικός (άνω ή κάτω), τότε οι ιδιοτιμές του A είναι τα διαγώνια στοιχεία του.***

Απόδειξη. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, θα περιορισθούμε στην περίπτωση που ο πίνακας $A=(a_{i,j})$ είναι άνω τριγωνικός. Έχουμε:

$$\det(A-\lambda\cdot\mathrm{I})=\det\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & a_{2,2}-\lambda & & a_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & \mathrm{O} & & a_{n,n}-\lambda \end{pmatrix},$$

και αναπτύσσοντας την ορίζουσα αυτή ως προς την πρώτη στήλη παίρνουμε:

$$\det(A-\lambda\cdot \mathrm{I}) = (a_{1,1}-\lambda)\det\begin{pmatrix} a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & & a_{n,n}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία ως προς την δεύτερη στήλη και διαδοχικά ως προς την τρίτη και τις υπόλοιπες, βρίσκουμε:

$$\det(A-\lambda\cdot \mathrm{I}) = (a_{1,1}-\lambda)\,(a_{2,2}-\lambda)\ldots(a_{n,n}-\lambda)\,.$$

Η ισότητα αυτή αποδεικνύει την ιδιότητα της *Πρότασης*. ■

Η τελευταία ιδιότητα που παραθέτουμε προκύπτει άμεσα από τις Σχέσεις Newton μεταξύ των συντελεστών και των ριζών ενός πολυωνύμου.

Πρόταση Ι.5.2.11. ***Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας*** $A=(a_{i,j})$ ***τάξης*** n***. Ονομάζουμε ίχνος του*** A ***και συμβολίζουμε με*** $tr(A)$ ***το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του*** A***. Ισχύει :***

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Γενικότερα, για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $\kappa = 0,1,2,\ldots,$ ***ισχύει:***

$$tr(A^{\kappa}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\kappa}\,. \blacksquare$$

Ι.5.3. Η ΜΟΡΦΗ JORDAN

Η *μορφή Jordan* ενός πίνακα $A=(a_{i,j})$ είναι σημαντική για τις διάφορες εφαρμογές και κυρίως για την απόδειξη της σύγκλισης των επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Έχουμε το:

Θεώρημα Ι.5.3.1. ***Για κάθε τετραγωνικό $n\times n$ πίνακα A, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε $T^{-1}\cdot A\cdot T=J$, όπου $J=J_A$ είναι ο πίνακας:***

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \mathrm{O} & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & J_\kappa \end{pmatrix},$$

με:

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \mathrm{O} \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & \mathrm{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Το λ_i είναι ιδιοτιμή πολλαπλότητας n_i του πίνακα A :

$$n_1+n_2+\ldots+n_\kappa=n,$$

και το n είναι το μέγεθος του πίνακα A.

Ο πίνακας J ονομάζεται η ***κανονική μορφή Jordan*** του πίνακα A, και προφανώς εξαρτάται από τα στοιχεία του A.

Η απόδειξη του πιο πάνω αποτελέσματος είναι σχετικά μεγάλη και πολύπλοκη και δεν πρόκειται να την παραθέσουμε. Θα παρατηρήσουμε μόνον ότι, όταν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι ανά δύο διάφορες, το περιεχόμενο του *Θεωρήματος Ι.5.3.1* ταυτίζεται με αυτό της *Πρότασης Ι.5.2.8.*

Ι.5.4. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ SCHUR

Θα δώσουμε κατ' αρχάς έναν *Ορισμό*:

Ορισμός Ι.5.4.1. ***Ένας τετραγωνικός πίνακας H λέγεται μοναδιοειδής εάν είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:***

$$H^{-1} = H^{*}.$$

Στην περίπτωση που ο τετραγωνικός πίνακας είναι πραγματικός και αντιστρέψιμος, έτσι ώστε:

$$H^{-1} = H^{T},$$

λέμε ότι ο H είναι ορθογώνιος. ■

Το *Θεώρημα Schur* είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα Ι.5.4.2.(Schur) ***Για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A, υπάρχει ένας μοναδιοειδής πίνακας H τέτοιος ώστε:***

$$H^* \cdot A \cdot H = U,$$

όπου U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Απόδειξη. Το *Θεώρημα* αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς το μέγεθος *n* των πινάκων.

Προφανώς, για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο.

Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός του *Θεωρήματος* είναι αληθινός για κάθε τετραγωνικό πίνακα μεγέθους μικρότερου ή ίσου του n. Θα δείξουμε ότι η προς απόδειξη ιδιότητα ισχύει και για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες μεγέθους ίσου με $n+1$.

Προς τούτο, έστω $z^{(1)}$ το ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1. Ας υποθέσουμε ότι:

$$\langle z^{(1)} / z^{(1)} \rangle = 1$$

(κάτι που είναι πάντα δυνατό), και ας επικαλεσθούμε την *μέθοδο ορθογωνοποίησης Schmidt* (*Παράγραφος Ι.3.4*) προκειμένου να κατασκευάσουμε τα διανύσματα $z^{(2)},\ldots,z^{(n+1)}$:

$$z^{(2)} = \gamma_2 \cdot (e^{(2)} + \beta_{2,1} \cdot z^{(1)})$$

.....

$$z^{\kappa} = \gamma_{\kappa} \cdot (e^{(\kappa)} + \beta_{\kappa,1} \cdot z^{(1)} + \beta_{\kappa,2} \cdot z^{(2)} + \ldots + \beta_{\kappa,\kappa-1} \cdot z^{(\kappa-1)}),$$

έτσι ώστε:

$$< z^{(i)} / z^{(j)} >= \begin{cases} 0 & \text{εάν } i \neq j \\ 1 & \text{εάν } i = j. \end{cases}$$

Προφανώς, η μέθοδος ορθογωνοποίησης ολοκληρώνει τον κύκλο εφαρμογής της όταν $\kappa = n+1,$ γιατί στο K^{n+1} δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερα από $n+1$ ορθογώνια διανύσματα (δηλαδή περισσότερα από $n+1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα).

Έστω τώρα ο πίνακας H_1 του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)},\ldots,z^{(n+1)}$. Από κατασκευής, είναι:

$$H_1^* = H_1.$$

Επίσης, ο πίνακας $A' = H_1^* \cdot A \cdot H_1$ είναι της μορφής:

$$A' = H_1^* \cdot A \cdot H_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_{1,2} & \cdots & d_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

όπου B ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Πράγματι, κατ' ανάγκη πρέπει να ισχύει ότι:

$$H_1^* \cdot A \cdot H_1 . z^{(1)} = \lambda_1 \cdot z^{(1)},$$

γιατί ο A' είναι όμοιος με τον A. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει ένας μοναδιοειδής πίνακας H_2 τέτοιος ώστε:

$$H_2^* \cdot B \cdot H_2 = U_2,$$

όπου U_2 είναι άνω τριγωνικός πίνακας της μορφής :

$$U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \cdots & & \cdots \\ & \lambda_3 & \cdots & \cdots \\ & \mathrm{O} & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix},$$

με $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n+1}$: ιδιοτιμές του A, επειδή $\det(A' - \lambda \cdot \mathrm{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \det(\mathrm{B} - \lambda \cdot \mathrm{I})$.

Θέτοντας:

$$H_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{H}_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

διαπιστώνουμε εύκολα ότι τόσο ο πίνακας H_3 όσο και ο πίνακας:

$$H = H_1 \cdot H_3$$

είναι μοναδιοειδής και επίσης ότι:

$$H^* \cdot A \cdot H = U$$

για κάποιον άνω τριγωνικό $n \times n$ πίνακα *U*. Η *Απόδειξη* είναι πλήρης. ■

Το *Θεώρημα Schur* έχει ορισμένες σπουδαίες συνέπειες. Μία από αυτές περιγράφεται στο ακόλουθο :

Πόρισμα Ι.5.4.3. ***Εάν ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι ερμιτιανός, υπάρχει ένας μοναδιοειδής πίνακας H τέτοιος ώστε ο πίνακας:***

$$D = H^* \cdot A \cdot H$$

να είναι διαγώνιος.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το *Θεώρημα Schur*, έχουμε:

$$(H^* \cdot A \cdot H)^* = U^* = H^* \cdot A \cdot (H^*)^* = H^* \cdot A \cdot H = U.$$

Άρα, $U = U^*$ και ο τριγωνικός πίνακας U είναι απαραίτητα διαγώνιος. ■

Παρατήρηση Ι.5.4.4. Τα στοιχεία της διαγώνιας του πίνακα U, στην *Απόδειξη* του *Πορίσματος Ι.5.4.3*, είναι πραγματικοί αριθμοί και, κατά συνέπεια, όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί. Αποδεικνύουμε δηλαδή με αυτόν τον διαφορετικό τρόπο την *Πρόταση Ι.5.2.3*. ■

Παρατήρηση Ι.5.4.5. ***Εάν ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A είναι πραγματικός συμμετρικός, τότε υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας H τέτοιος ώστε ο πίνακας:***

$$D = H^T \cdot A \cdot H$$

να είναι διαγώνιος. ■

Παρατήρηση Ι.5.4.6. Τόσο στην περίπτωση του *Πορίσματος Ι.5.4.3*, όσο και στην περίπτωση της *Παρατήρησης Ι.5.4.5*, ο πίνακας H έχει στήλες του τα ιδιοδιανύσματα του A. Πράγματι, είναι:

$$A \cdot H = H \cdot D$$

με $H = (v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)})$ και $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ = ο διαγώνιος πίνακας που έχει στην κύρια διαγώνιά του τις ιδιοτιμές $\lambda_1, ..., \lambda_n$ του A. Έτσι:

$$A \cdot v^{(i)} = \lambda_i \cdot v^{(i)}, \text{ για κάθε } i = 1,2,...,n. \blacksquare$$

Θα εισάγουμε τώρα την έννοια του θετικά ορισμένου συμμετρικού πίνακα, που θα μας χρησιμεύσει στην συνέχεια. Έστω A ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Λέμε ότι ο A είναι ***θετικά ορισμένος***, εάν οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα z ισχύει :

$$\langle z / A.z \rangle > 0.$$

Επειδή ο A είναι συμμετρικός, ο πίνακας, του οποίου οι στήλες είναι τα ιδιοδιανύσματα του A, είναι ορθογώνιος. Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}$ του A συνιστούν μία βάση του $\boldsymbol{K}^n$ και κάθε διάνυσμα $z \in \boldsymbol{K}^n$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή $z = c_1 \cdot v^{(1)} + c_2 . \cdot v^{(2)} + ... + c_n \cdot v^{(n)}$. Εάν επιλέξουμε $z = v^{(i)}$, για οποιοδήποτε $i = 1,2,...,n$, τότε:

$$\langle v^{(i)} / A \cdot v^{(i)} \rangle = \lambda_i \langle v^{(i)} / v^{(i)} \rangle > 0,$$

γεγονός που δείχνει ότι ένας συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος εάν και μόνον εάν όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί (*Πρόταση Ι.5.2.3*) και μάλιστα θετικοί.

Ι.5.5. ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Σε πολλές εφαρμογές, είναι συχνά απαραίτητος ο εντοπισμός της θέσης των ιδιοτιμών ενός πίνακα στο μιγαδικό επίπεδο. Θα δώσουμε έναν περιορισμένο αριθμό αποτελεσμάτων που επιτρέπουν άλλες φορές ευκολότερα ή ακριβέστερα κι άλλες φορές δυσκολότερα ή κατά προσέγγιση, τη διερεύνηση αυτού του εντοπισμού.

Θεώρημα Ι.5.5.1 ***Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ μιγαδικός πίνακας. Εάν $A = (a_{i,j})$ και***

$$\Lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{i,j} \right| \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

τότε όλες οι ιδιοτιμές λ του πίνακα A περιέχονται μέσα στην ένωση όλων των κλειστών δίσκων που έχουν κέντρα τα σημεία $a_{i,i}$ και ακτίνες Λ_i :

$$\left| \lambda - a_{i,i} \right| \leq \Lambda_i \text{ , } \textbf{\textit{για}} \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Απόδειξη. Έστω λ μία ιδιοτιμή του πίνακα A και έστω $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A.

Ας υποθέσουμε ότι z_i είναι η συνιστώσα με το μεγαλύτερο μέτρο. Μπορούμε να διαιρέσουμε το διάνυσμα z με το $|z_i|$, έτσι ώστε τα μέτρα όλων των νέων συνιστωσών να είναι μικρότερα ή ίσα της μονάδας και το μέτρο της *i*-οστής νέας συνιστώσας να ισούται με ένα.

Από την σχέση

$$(\lambda - a_{i,i}) \cdot z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} \cdot z_j$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\left|\lambda - a_{i,i}\right| \le \sum_{j\neq i}^{n}_{j=1} \left| a_{i,j} \right| \frac{\left|z_j\right|}{\left|z_i\right|} \le \sum_{j\neq i}^{r}_{j=1} \left| a_{i,j} \right| = \Lambda_i ,$$

γιατί $\left|z_j\right| \le \left|z_i\right|$. Έτσι, η ιδιοτιμή λ βρίσκεται μέσα στον κλειστό δίσκο που έχει κέντρο το $a_{i,i}$ και ακτίνα ίση με Λ_i. Συνεπώς, όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A βρίσκονται μέσα στην ένωση αυτών των κλειστών δίσκων. ■

Το *Θεώρημα* αυτό είναι γνωστό σαν το ***Θεώρημα Gerschgorin-Hadamard***. Άμεσες συνέπειές του είναι τα επόμενα τρία *Πορίσματα*:

Πόρισμα Ι.5.5.2. ***Εάν*** $\rho(A)$ ***είναι η φασματική ακτίνα του τετραγωνικού*** $n \times n$ ***πίνακα*** $A = (a_{i,j})$***, τότε:***

$$\rho(A) \le \max_{1\le j\le n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right|.$$

Απόδειξη. Θα υιοθετήσουμε τους εξής δύο συμβολισμούς: $\Delta(\Sigma, r)$ θα είναι ο *ανοικτός επίπεδος δίσκος* με κέντρο το σημείο $\Sigma \in \boldsymbol{C}$ και με ακτίνα $r > 0$ και $\overline{\Delta(\Sigma, r)}$ θα είναι ο *κλειστός επίπεδος δίσκος* με κέντρο το Σ και ακτίνα *r*. Δηλαδή:

$$\Delta(\Sigma, r) = \{\mathrm{T} \in \boldsymbol{C} : \left|\mathrm{T} - \Sigma\right| < r\} \quad \text{και} \quad \overline{\Delta(\Sigma, r)} = \{\mathrm{T} \in \boldsymbol{C} : \left|\mathrm{T} - \Sigma\right| \le r\}.$$

Επειδή $\left|\mathrm{T} - a_{i,i}\right| \le \Lambda_i \Rightarrow \left|T\right| \le \left|a_{i,i}\right| + \Lambda_i$, ο κλειστός δίσκος $\overline{\Delta(a_{i,i}, \Lambda_i)}$ περιέχεται στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0, |a_{i,i}| + \Lambda_i)}$ Από το προηγούμενο *Θεώρημα* έπεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A περιέχονται στην ένωση των κλειστών δίσκων $\overline{\Delta(0, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j})}$ για $i = 1,2,\ldots,n.$ Η φασματική ακτίνα του A είναι λοιπόν μικρότερη ή ίση της μεγαλύτερης ακτίνας αυτών των δίσκων. ■

Πόρισμα Ι.5.5.3. ***Εάν*** $\rho(A)$ ***είναι η φασματική ακτίνα του τετραγωνικού*** $n \times n$ ***πίνακα*** $A = (a_{i,j})$***, τότε:***

$$\rho(A^T) \le \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| .$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την *Πρόταση Ι.5.2.1*, ο πίνακας A και ο αντίστροφος του A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Το αποτέλεσμα του *Πορίσματος* έπεται άμεσα, από την εφαρμογή του προηγούμενου *Θεωρήματος* για τον πίνακα A^T. ■

Πόρισμα Ι.5.5.4. ***Αν*** $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ***είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε:***

$$\rho(A) \le \min\{\kappa_1, \kappa_2\},$$

όπου:

$$\kappa_1 = \max_{1 \le i \le n} \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, d_j}{d_1}, \qquad \kappa_2 = \max_{1 \le j \le n} d_j \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_{i,j}|}{d_i}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε:

$$D := \begin{pmatrix} d_1 & & & \mathrm{O} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, επειδή όλοι οι αριθμοί d_i είναι θετικοί και επομένως διάφοροι του μηδενός. Ο πίνακας:

$$B = D^{-1} \cdot A \cdot D$$

έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα A. Το αποτέλεσμα του *Πορίσματος* προκύπτει από την εφαρμογή των *Πορισμάτων Ι.5.5.3* και *Ι.5.5.4* για τον πίνακα B. ■

Θα δώσουμε τέλος ένα αποτέλεσμα που ισχύει μόνο στην περίπτωση των συμμετρικών πραγματικών πινάκων.

Θεώρημα Ι.5.5.5. ***Έστω A ένας συμμετρικός πραγματικός $n \times n$ πίνακας. Εάν αριθμήσουμε τις ιδιοτιμές του έτσι ώστε:***

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n ,$$

τότε:

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\langle z / A.z \rangle}{\langle z / z \rangle} = \lambda_n \leq \frac{\langle w / A.w \rangle}{\langle w / w \rangle} \leq \lambda_1 = \max_{z \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\langle z / A.z \rangle}{\langle z / z \rangle}$$

για κάθε $w \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Απόδειξη. Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί (*Πρόταση Ι.5.2.3*) και υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας Q έτσι ώστε το γινόμενο $\Lambda = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ να είναι ο διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές του A (*Θεώρημα Ι.5.4.2*).

Ας ονομάσουμε $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ τα διανύσματα στήλες του πίνακα Q. Επειδή ο Q είναι αντιστρέψιμος, τα διανύσματα αυτά συνιστούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$ και συνεπώς κάθε $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ μπορεί να γραφεί υπό την μορφή :

$$x = c_1 \cdot x^{(1)} + c_2 \cdot x^{(2)} + \ldots + c_n \cdot x^{(n)}$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Έτσι, βλέπουμε ότι:

$$\langle x / x \rangle = c_1^2 \langle x^{(1)} / x^{(1)} \rangle + \ldots + c_n^2 \langle x^{(n)} / x^{(n)} \rangle$$

και

$$\langle x / A \cdot x \rangle = c_1^2 \, \lambda_1 \langle x^{(1)} / x^{(1)} \rangle + \ldots + c_n^2 \, \lambda_n \langle x^{(n)} / x^{(n)} \rangle,$$

γιατί $\langle x^{(i)} / x^{(j)} \rangle = 0$ για κάθε $i \neq j$ και $A \cdot x = c_1 \, \lambda_1 \cdot x^{(1)} + \ldots + c_n \, \lambda_n \cdot x^{(n)}$. Θέτουμε:

$$m_i := c_i^2 \langle x^{(i)} / x^{(i)} \rangle \text{ για } i = 1,2,\ldots,n.$$

Προφανώς, $m_i \geq 0$ και:

$$\frac{\langle x / A.x \rangle}{\langle x / x \rangle} = \frac{\lambda_1 \, m_1 + \ldots + \lambda_n \, m_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Εάν τοποθετήσουμε τα σημεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ επάνω στον πραγματικό άξονα και εάν τους επισυνάψουμε τις μάζες $m_1, \ldots, m_n$, βλέπουμε ότι ο λόγος $\langle x / A \cdot x \rangle / \langle x / x \rangle$ είναι το βαρύκεντρο αυτών των μαζών και επομένως :

$$\lambda_n \leq \frac{\langle x / A \cdot x \rangle}{\langle x / x \rangle} \leq \lambda_1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Το βαρύκεντρο των μαζών δεν μπορεί να ταυτίζεται με το λ_n παρά μόνο εάν όλες οι μάζες είναι μηδενικές εκτός από εκείνη του σημείου λ_n. Εάν το λ_n είναι απλή ιδιοτιμή του A, τότε $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = 0$, που συνεπάγεται ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, γεγονός που πιστοποιεί ότι τότε το διάνυσμα *x* είναι ανάλογο του διανύσματος $x^{(n)}$. Εάν το λ_n είναι πολλαπλή ιδιοτιμή, η απόδειξη είναι όμοια. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$\lambda_n = \min_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\langle x / A \cdot x \rangle}{\langle x / x \rangle}.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο, αποδεικνύεται ότι:

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\langle x / A \cdot x \rangle}{\langle x / x \rangle},$$

και η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* ολοκληρώνεται. ■

Ι.6. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

Το *Εδάφιο* αυτό συνιστά μία ευθεία εισαγωγή στη Θεωρία των Άμεσων Μεθόδων Επίλυσης Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων και στις επαναληπτικές μεθόδους υπολογισμού των ιδιοτιμών ενός πίνακα.

Θα λέμε ότι πραγματοποιήθηκε μία ***διάσπαση ενός πίνακα*** A, εάν είναι γνωστοί δύο άλλοι πίνακες B και C και εάν ο A γράφτηκε υπό την μορφή:

$$A = B \cdot C.$$

Στο παρόν *Εδάφιο* θα αρχίσουμε να μελετούμε τρείς βασικούς τύπους διάσπασης.

Ι.6.1. ΔΙΑΣΠΑΣΗ GAUSS

Η ***διάσπαση Gauss*** συνίσταται στη γραφή ενός πίνακα A υπό την μορφή:

$$A = L \cdot U,$$

όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, που έχει όλα τα στοιχεία της διαγώνιάς του ίσα με 1, και U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Η συγκεκριμένη διάσπαση οδηγεί στη μέθοδο Gauss για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων καθώς επίσης και στον αλγόριθμο LR για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών πίνακα. Η ύπαρξη της διάσπασης Gauss πιστοποιείται με την παρουσίαση του αλγορίθμου κατασκευής των πινάκων L και U: Πρόκειται για την ***μέθοδο Gauss***, που εφαρμόζεται κατά την επίλυση συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Θεώρημα Ι.6.1.1. ***Εάν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε η διάσπαση Gauss του A υπάρχει και είναι μοναδική.***

Απόδειξη. Προς το παρόν, θα αποδείξουμε μόνον τη μοναδικότητα της διάσπασης Gauss.

Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν κάτω τριγωνικοί πίνακες L_1 και L_2, που έχουν όλα τα στοιχεία των διαγώνιών τους ίσα με 1, και άνω τριγωνικοί πίνακες U_1 και U_2 τέτοιοι ώστε :

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2 .$$

Προφανώς, οι L_1 και L_2 είναι αντιστρέψιμοι, γιατί έχουν μόνον μία (πολλαπλή) ιδιοτιμή: τον αριθμό 1. Επί πλέον, τόσο ο U_1, όσο και ο U_2 είναι αντιστρέψιμοι, επειδή ο A μπορεί επίσης να αντιστραφεί. Έτσι, θα ισχύει ότι:

$$L_2^{-1} \cdot L_1 = U_2 \cdot U_1^{-1} .$$

Σύμφωνα με το περιεχόμενο της *Παραγράφου Ι.3.6*, ο πίνακας $L_2^{-1} \cdot L_1$ είναι κάτω τριγωνικός και ο πίνακας $U_2 \cdot U_1^{-1}$ είναι άνω τριγωνικός. Οι δύο αυτοί πίνακες δεν μπορεί λοιπόν παρά να είναι διαγώνιοι, γιατί είναι ίσοι. Ακόμα, $L_2^{-1} \cdot L_1 = \mathrm{I}$, γιατί τα διαγώνια στοιχεία του L_2^{-1} και του L_1 ισούνται με 1. Άρα,

$$L_2^{-1} \cdot L_1 = \mathrm{I} \Rightarrow L_1 = L_2 \text{ και } U_2 \cdot U_1^{-1} = \mathrm{I} \Rightarrow U_2 = U_1 .$$

Οι δύο αυτές ισότητες εγγυώνται τη μοναδικότητα της διάσπασης Gauss. ■

Ι.6.2. ΔΙΑΣΠΑΣΗ CHOLESKY

Η ***διάσπαση Cholesky*** είναι μία παραλλαγή της διάσπασης Gauss, που δεν εφαρμόζεται παρά μόνο στην περίπτωση των συμμετρικών πινάκων, και συνίσταται στην έκφραση του τετραγωνικού πίνακα A υπό την μορφή :

$$A = L \cdot L^T ,$$

όπου *L* είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας.

Θεώρημα Ι.6.2.1. ***Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της διάσπασης Cholesky ενός πίνακα είναι ο πίνακας να είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος.***

Απόδειξη. Εάν ο πίνακας είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε είναι και αντιστρέψιμος επειδή οι ιδιοτιμές του είναι γνήσια θετικές. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την μέθοδο της διάσπασης Gauss.

Προς τούτο, θέτουμε:

$$A = (a_{i,j}), \qquad L = (l_{i,j}) \qquad \text{και} \qquad U = (u_{i,j}).$$

Προφανώς, θα ισχύει:

$$a_{i,i} = l_{i,i}\, u_{i,i}.$$

Αντί όμως να επιλέξουμε αυθαίρετα, όπως κατά την εφαρμογή της μεθόδου Gauss, $l_{i,i} = 1$, θα πάρουμε $l_{i,i} = \sqrt{a_{i.i}}$. Πράγματι, επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος, είναι:

$$a_{i,i} = \langle e^{(i)} / A.e^{(i)} \rangle > 0 \quad \text{για κάθε} \quad i = 1,2,\ldots,n .$$

Επομένως, θα είναι και:

$$u_{i,i} = \sqrt{a_{i,i}} \quad , \quad U = L^T ,$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι η θετικά ορισμένη συμμετρία του πίνακα A είναι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της διάσπασης Cholesky.

Αντιστρόφως, εάν υποτεθεί ότι η διάσπαση Cholesky του πίνακα A υπάρχει, τότε:

$$\langle z / A \cdot z \rangle = \langle z / L \cdot L^T \cdot z \rangle = \langle L^T \cdot z / L^T \cdot z \rangle > 0$$

για κάθε $z \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, ανισότητα που ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*.■

Παρατήρηση Ι.6.2.2. Αντίθετα με ότι συμβαίνει στην περίπτωση της μεθόδου Gauss, ***η διάσπαση Cholesky πίνακα δεν είναι μοναδική***. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $A = L_1 \cdot L_1^T = L_2 \cdot L_2^T$. Σε μία τέτοια περίπτωση, θα είναι $L_2^{-1} \cdot L_1 = L_2^T \cdot (L_1^T)^{-1}$, και ο μεν πίνακας $L_2^{-1} \cdot L_1$ θα είναι κάτω τριγωνικός, ο δε πίνακας $L_2^T \cdot (L_1^T)^{-1}$ θα είναι άνω τριγωνικός. Επομένως, οι δύο αυτοί πίνακες δεν μπορεί να είναι ίσοι μεταξύ τους παρά μόνον εάν είναι διαγώνιοι, δηλαδή εάν υπάρχει διαγώνιος πίνακας D τέτοιος ώστε

$$L_1 = L_2 \cdot D \text{ και } L_2^T = D \cdot L_1^T ,$$

με $D^2 = \mathrm{I}$ επειδή $L_1 = L_1 \cdot D^2$. Αυτό σημαίνει ότι αν $D = (d_{i,j})$ θα ισχύει $d_{i,i} = \pm 1$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, λέμε ότι ***η διάσπαση είναι επί της ουσίας μοναδική***. ■

Ι.6.3. ΔΙΑΣΠΑΣΗ HOUSEHOLDER

Η ***διάσπαση Householder*** συνίσταται στη γραφή ενός τετραγωνικού πίνακα A υπό την μορφή:

$$A = Q \cdot U,$$

όπου Q είναι ένας ορθογώνιος πίνακας και U ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Η συγκεκριμένη διάσπαση οδηγεί στη μέθοδο επίλυσης Householder τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων καθώς επίσης και στον αλγόριθμο QR υπολογισμού ιδιοτιμών πίνακα.

Η ύπαρξη της διάσπασης Householder αποδεικνύεται με την διατύπωση των κανόνων που επιτρέπουν την κατασκευή των πινάκων Q και U.

Θεώρημα Ι.6.3.1. ***Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, η διάσπαση Householder του A υπάρχει και είναι επί της ουσίας μοναδική.***

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε στην απόδειξη της επί της ουσίας μοναδικότητας. Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες Q_1 και Q_2, με $Q_1 \neq Q_2$, και άνω τριγωνικοί πίνακες U_1 και U_2, με $U_1 \neq U_2$, τέτοιοι ώστε

$$A = Q_1 \cdot U_1 = Q_2 \cdot U_2.$$

Επειδή ο *A* είναι αντιστρέψιμος, μπορούμε άμεσα να διαπιστώσουμε ότι:

$$Q_2^{-1} \cdot Q_1 = U_2 \cdot U_1^{-1} = V,$$

όπου ο *V* είναι ένας άνω τριγωνικός μοναδιοειδής πίνακας. Έτσι:

$$V^T \cdot V = \mathrm{I}.$$

Η τελευταία ισότητα είναι μία διάσπαση Cholesky του πίνακα I. Ο πίνακας $V = (v_{i,j})$ είναι διαγώνιος τέτοιος ώστε $v_{i,i} = \pm 1$. Επί πλέον:

$$Q_1 = Q_2 \cdot V \text{ και } U_2 = V \cdot U_1,$$

ισότητες που βεβαιώνουν ότι η διάσπαση Householder ενός τετραγωνικού αντιστρέψιμου πίνακα είναι επί της ουσίας μοναδική. ■

Κεφάλαιο 2
Αριθμητικός Υπολογισμός Ιδιοτιμών

ΙΙ.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Η ***μέθοδος των δυνάμεων*** χρησιμοποιείται για την εύρεση της μεγαλύτερης κατ΄ απόλυτη τιμή ιδιοτιμής ενός πίνακα και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος. (Σε ορισμένες περιπτώσεις, μία αρκετά απλή πράξη – που λέγεται *ύφεση* – μπορεί να εκτελεσθεί πάνω στον πίνακα, έτσι ώστε η μέθοδος των Δυνάμεων να εφαρμόζεται προκειμένου να βρεθούν και οι υπόλοιπες δυνάμεις.)

Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας, με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα $\{z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(n)}\}$ συνιστά μία βάση του $\mathbb{R}^n$ (πρ. βλ. *Πρόταση Ι.5.2.7*) και ότι:

$$|\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n| \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Εάν $u^{(0)}$ είναι τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $< u^{(0)} / z^{(1)} > \neq 0$, δημιουργούμε την επαγωγική ακολουθία :

$$u^{(\kappa+1)} = A \cdot u^{(\kappa)} \qquad \kappa = 0,1,2,...$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(n)}$ σχηματίζουν βάση, θα είναι :

$$u^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^{(i)}$$

$$u^{(1)} = A \cdot u^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot A \cdot z^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot z^{(i)},$$

και διαδοχικά:

$$u^{(\kappa)} = A \cdot u^{(\kappa-1)} = \ldots = A^{\kappa} \cdot u^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \lambda_i^{\kappa} \cdot z^{(i)} \Rightarrow$$

$$u^{(\kappa)} = \alpha_1 \lambda_1^{\kappa} \cdot z^{(i)} + \lambda_1^{\kappa} \cdot \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{\kappa} \cdot z^{(i)}.$$

Θεωρώντας τον λόγο δύο αντίστοιχων συνιστωσών του $u^{(\kappa+1)}$ και του $u^{(\kappa)}$, παίρνουμε:

$$\frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} = \lambda_1 \frac{[\alpha_1 \cdot z_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \, (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{\kappa+1} \cdot z^{(i)}]_j}{[\alpha_1 \cdot z_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \, (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{\kappa} \cdot z^{(i)}]_j} .$$

Παρατηρώντας ότι $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ για κάθε $i = 2,3,\ldots,n$ (γιατί $|\lambda_i| > |\lambda_1|$), βλέπουμε ότι:

$$\lim_{\kappa \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{\kappa} = 0, \text{ για κάθε } i = 2,3,\ldots,n$$

και επομένως ισχύει ότι:

$$\lim_{\kappa \to \infty} \frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} = \lambda_1 .$$

Επί πλέον, η ταχύτητα σύγκλισης προς το πιο πάνω όριο εξαρτάται από τον λόγο

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|,$$

γιατί:

$$\frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} = \lambda_1 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\kappa}\right).$$

Από την άλλη μεριά, αξίζει να σημειωθεί ότι:

$$\frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} \cdot u^{(\kappa+1)} = \frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} \cdot A \cdot u^{(\kappa)} \Rightarrow$$

$$\frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} \cdot \frac{u^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa+1)}} = A \cdot \frac{u^{(\kappa)}}{(u^{(\kappa)})_j} \Rightarrow$$

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{u^{(\kappa)}}{u_j^{(\kappa)}} = z^{(1)}.$$

Εάν υποθέσουμε τώρα ότι:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r, \quad (|\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq |\lambda_{r+2}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|),$$

διαπιστώνουμε με τον ίδιο τρόπο πως:

$$\frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} = \lambda_1 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right)^{\kappa}\right),$$

ενώ αν υποθέσουμε ότι:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \ , \qquad |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα πως:

$$u^{(2\kappa)} = (\alpha_1 \cdot z^{(1)} + \alpha_2 \cdot z^{(2)})\, \lambda_1^{2.\kappa} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i\, \lambda_i^{2.\kappa} \cdot z^{(i)}$$

και

$$u^{(2\kappa+1)} = (\alpha_1 \cdot z^{(1)} - \alpha_2 \cdot z^{(2)})\, \lambda_1^{2\kappa+1} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i\, \lambda_i^{2\kappa+1} \cdot z^{(i)},$$

απ' όπου συνεπάγεται αμέσως ότι:

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{u_j^{(2\kappa+2)}}{u_j^{(2\kappa)}} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{u_j^{(2\kappa+3)}}{u_j^{(2\kappa+1)}} = \lambda_1^2 \ .$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου η ιδιοτιμή λ_1 είναι μιγαδικός αριθμός. Τότε, θα ισχύει $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ και, όπως προηγουμένως :

$$u^{(\kappa)} = \alpha_1\, \lambda_1^{\kappa} \cdot z^{(1)} + \alpha_2\, \lambda_2^{\kappa} \cdot z^{(2)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i\, \lambda_i^{\kappa} \cdot z^{(i)},$$

με $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$, επειδή το διάνυσμα $u^{(\kappa)}$ έχει πραγματικές συνιστώσες και $z^{(2)} = \overline{z^{(1)}}$.

Θέτουμε:

$$\lambda_1 := r\, e^{i\theta}, \qquad \lambda_2 := r\, e^{-i\theta},$$

$$\alpha_1 := R\, e^{i\varphi}, \qquad \alpha_2 = R\, e^{-i\varphi}$$

και

$$w^{(1)} = \mathrm{Re}(z^{(1)}).$$

Με αυτήν την γραφή, το διάνυσμα $u^{(\kappa)}$ εκφράζεται ως εξής:

$$u^{(\kappa)} = 2\, R\, r^{\kappa} \cos(\kappa\theta + \varphi)\, w^{(1)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i\, \lambda_i^{\kappa} \cdot z^{(i)}.$$

Σχηματίζοντας τον λόγο:

$$s_{\kappa} = \frac{\det\begin{pmatrix} u_j^{(\kappa+1)} & u_j^{(\kappa+2)} \\ u_j^{(\kappa+2)} & u_j^{(\kappa+3)} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} u_j^{(\kappa)} & u_j^{(\kappa+3)} \\ u_j^{(\kappa+1)} & u_j^{(\kappa+2)} \end{pmatrix}},$$

βρίσκουμε ότι:

$$s_{\kappa} = \lambda_1\, \lambda_2 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\kappa}\right) = r^2 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\kappa}\right),$$

εφόσον δεχθούμε ότι $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Από αυτήν τη σχέση μπορούμε να προσδιορίσουμε το r.

Ας υπολογίσουμε το θ. Επειδή

$$\cos[(\kappa+1)\theta + \varphi] + \cos[(\kappa-1)\theta + \varphi] = 2\cos[\kappa\theta + \varphi]\cos\theta,$$

έχουμε:

$$\frac{r \cdot u_j^{(\kappa-1)} + r^{-1} \cdot u_j^{(\kappa+1)}}{2 \cdot u_j^{(\kappa)}} = \cos\theta + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\kappa}\right),$$

και το θ προσδιορίζεται εύκολα.

Ας εξετάσουμε τέλος την περίπτωση όπου τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A δεν συνιστούν πλέον βάση του $\mathbb{R}^n$.

Για απλοποίηση, θα υποθέσουμε ότι ο πίνακας A μπορεί να τεθεί σε μορφή Jordan :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

με $|\lambda_1| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα του A δεν συνιστούν πια βάση, ας συμβολίσουμε με $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}$ τα διανύσματα της βάσης ως προς την οποία ο πίνακας *A* μετασχηματίζεται σε μορφή Jordan :

$$\begin{aligned} A \cdot z^{(1)} &= \lambda_1 \cdot z^{(1)} + z^{(2)}, \\ A \cdot z^{(2)} &= \lambda_1 \cdot z^{(2)}, \\ A \cdot z^{(3)} &= \lambda_3 \cdot z^{(3)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A \cdot z^{(n)} &= \lambda_n \cdot z^{(n)}. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε έτσι ότι:

$$u^{(1)} = A \cdot u^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1 \cdot z^{(1)} + \alpha_1 \cdot z^{(2)} + \alpha_2 \lambda_1 \cdot z^{(2)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i \lambda_i \cdot z^{(i)},$$

και γενικότερα:

$$u^{(\kappa)} = A^{(\kappa)} \cdot u^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^{\kappa} \cdot z^{(1)} + \alpha_1 \kappa \lambda_1^{\kappa\text{-}1} \cdot z^{(2)} + \alpha_2 \lambda_1^{\kappa} \cdot z^{(2)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i \lambda_i^{\kappa} \cdot z^{(i)}$$

$$\Rightarrow$$

$$u^{(\kappa)} = (\alpha_1 \cdot z^{(1)} + \alpha_2 \cdot z^{(2)}) \lambda_1^{\kappa} + \alpha_1 \kappa \lambda_1^{\kappa\text{-}1} \cdot z^{(2)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i \lambda_i^{\kappa} \cdot z^{(i)},$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} = \lambda_1 \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right).$$

Από την τελευταία αυτή σχέση υπολογίζεται το λ_1. Αξίζει να σημειωθεί ότι εάν χρησιμοποιούσαμε τον λόγο των προηγουμένων οριζουσών θα είχαμε βρεί ότι:

$$s_{\kappa} = \lambda_1^2 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{\kappa}\right).$$

II.1.1. Η ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η σύγκλιση της μεθόδου των Δυνάμεων μπορεί να είναι εξαιρετικά αργή, εάν υπάρχει άλλη ιδιοτιμή πολύ γειτονική με την λ_1. Σε μία τέτοια περίπτωση, επιταχύνουμε τη σύγκλιση, χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο επιτάχυνσης της σύγκλισης που πολύ συχνά εφαρμόζεται στην Αριθμητική Ανάλυση : *τον **αλγόριθμο Δ^2 του Aitken***.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτόν, εάν

$$(S_\kappa = S + \mathrm{a}\,\mathrm{b}^\kappa = S + \mathrm{b}\,(S_{\kappa-1} - S) : \kappa \in \mathbb{N})$$

είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε, με δεδομένο ότι:

$$\Delta S_\kappa = S_{\kappa+1} - S_\kappa = \mathrm{a}\,\mathrm{b}^\kappa\,(\mathrm{b}-1) \text{ και } \Delta^2 S_\kappa = \Delta S_{\kappa+1} - \Delta S_\kappa = \mathrm{a}\,\mathrm{b}^\kappa\,(\mathrm{b}-1)^2,$$

ορίζουμε την καινούργια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(V_\kappa : \kappa \in \mathbb{N})$ με:

$$V_\kappa = S_\kappa - \frac{(\Delta S_\kappa)^2}{\Delta^2 S_\kappa}.$$

Είναι προφανές ότι:

$$V_\kappa = S + \mathrm{a}\,\mathrm{b}^\kappa - \frac{\mathrm{a}^2\,\mathrm{b}^{2\kappa}\,(\mathrm{b}-1)^2}{\mathrm{a}\,\mathrm{b}\,(\mathrm{b}-1)^2} = S.$$

Εάν πάλι

$$(S_\kappa = S + (\mathrm{b} + \varepsilon_\kappa)\,(S_{\kappa-1} - S) : \kappa \in \mathbb{N})$$

είναι άλλη ακολουθία πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$\lim_{\kappa\to\infty} \varepsilon_\kappa = 0,$$

τότε, με δεδομένο ότι

$$\Delta S_\kappa = [(\mathrm{b} + \varepsilon_{\kappa+1}) - 1]\,(\mathrm{b} + \varepsilon_\kappa)\,(S_{\kappa-1} - S)$$

και

$$\Delta^2 S_\kappa = [(\mathrm{b} + \varepsilon_{\kappa+2} - 1)\,(\mathrm{b} + \varepsilon_{\kappa+1}) - (\mathrm{b} + \varepsilon_{\kappa+1} - 1)]\,(\mathrm{b} + \varepsilon_\kappa)\,(S_{\kappa-1} - S),$$

διαπιστώνουμε ότι:

$$\lim_{\kappa\to\infty} V_\kappa = S \qquad (\text{εάν } \mathrm{b} \neq 1).$$

Επί πλέον, καθώς:

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{V_\kappa - S}{S_\kappa - S} = 0 \ (\text{εάν } \mathrm{b} \neq 1),$$

η ακολουθία $(V_\kappa : \kappa \in \mathbb{N})$ συγκλίνει προς το S πιο γρήγορα απ' ότι η ακολουθία $(\mathrm{S}_\kappa : \kappa \in \mathbb{N})$.

Εάν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Δ^2 του Aitken στην ακολουθία που θεωρήσαμε πιο πάνω με την μέθοδο της δύναμης :

$$S_\kappa = \frac{u_j^{(\kappa+1)}}{u_j^{(\kappa)}} = \lambda_1 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\kappa\right),$$

θα βρούμε:

$$V_\kappa = \lambda_1 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^\kappa\right) \quad (\text{εάν } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}).$$

Ας σημειωθεί ότι υπάρχει μία γενίκευση του αλγόριθμου Δ^2 του Aitken που ονομάζεται *ε-αλγόριθμος* και που αποδίδεται στον *D.Shanks* και στον *P.Wynn*. Αυτός ο αλγόριθμος επιτρέπει την περαιτέρω αύξηση της ταχύτητας της μεθόδου της δύναμης.

ΙΙ.1.2. ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Διάφορες παραλλαγές της μεθόδου των Δυνάμεων προτείνονται με σκοπό την επιτάχυνση της ταχύτητας σύγκλισης της μεθόδου. Ανάμεσα σ' αυτές, δύο είναι οι κυριότερες :

ΙΙ.1.2.(i).Η Μέθοδος των Ιχνών. Όπως είδαμε στην *Πρόταση Ι.5.2.11*, το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου ενός τετραγωνικού πίνακα A τάξης n λέγεται ***ίχνος*** του A, συμβολίζεται με $tr(A)$, και έχει την ιδιότητα:

$$tr(A^m) = \lambda_1^m + \ldots + \lambda_n^m$$

για κάθε $m = 1,2,\ldots$

Έπεται ότι σε μία τέτοια περίπτωση, θα ισχύει :

$$[tr(A^m)]^{\frac{1}{m}} = \lambda_1 [1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^m]^{\frac{1}{m}} = 1 + \mathrm{O}[\frac{1}{m}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m],$$

και συνεπώς, εάν $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ για $i = 2,3,\ldots,n$, θα είναι :

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} [tr(A^m)]^{\frac{1}{m}}.$$

Από πρακτικής άποψης, είναι πιο εύκολο να υπολογισθεί η ακολουθία πινάκων $A^2, A^4, A^8, A^{16},\ldots,$ με ύψωση στο τετράγωνο των διαδοχικά προκυπτόντων πινάκων. Έτσι, τελικά, η μέθοδος περιγράφεται από τον *Τύπο*:

$$[tr(A^{2^\kappa})]^{1/2} = \lambda_1 + \mathrm{O}[\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2^\kappa}].$$

II.1.2.(ii). Η Μέθοδος του Εσωτερικού Γινομένου. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην κατασκευή δύο ακολουθιών διανυσμάτων :

$$u^{(\kappa+1)} = A \cdot u^{(\kappa)} \text{ και } v^{(\kappa+1)} = A^T \cdot v^{(\kappa)},$$

με:

$$u^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z^{(i)} \text{ και } v^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot w^{(i)},$$

όπου $z^{(i)}$ και $w^{(i)}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του A και του A^{T}, αντίστοιχα (προϋποτιθεμένου βεβαίως ότι οι ιδιοτιμές του A είναι ανά δύο διάφορες μεταξύ τους).

Τότε, θα είναι:

$$\langle u^{(\kappa)} / v^{(\kappa)} \rangle = \langle A^{\kappa} \cdot u^{(0)} / A^{\mathrm{T}^{\kappa}} \cdot v^{(0)} \rangle = \langle v^{(0)} / A^{2\kappa} \cdot u^{(0)} \rangle,$$

δηλαδή:

$$\langle u^{(\kappa)} / v^{(\kappa)} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot w^{(i)} / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \lambda_i^{2\kappa} \cdot z^{(i)} \rangle.$$

Επειδή, σύμφωνα με την *Πρόταση Ι.5.2.2*, $\langle w^{(i)} / z^{(j)} \rangle = 0 \;\; (i \neq j)$, έπεται ότι:

$$\langle u^{(\kappa)} / v^{(\kappa)} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \beta_i \, \lambda_i^{2\kappa} \langle z^{(i)} / w^{(i)} \rangle.$$

Με όμοιο τρόπο, διαπιστώνουμε ότι:

$$\langle u^{(\kappa)} / v^{(\kappa-1)} \rangle = \langle A^{\kappa} \cdot u^{(0)} / A^{T^{\kappa-1}} \cdot v^{(0)} \rangle = \langle v^{(0)} / A^{2.\kappa-1} \cdot u^{(0)} \rangle \Rightarrow$$

$$\langle u^{(\kappa-1)} / v^{(\kappa-1)} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \beta_i \, \lambda_i^{2\kappa-1} \langle z^{(i)} / w^{(i)} \rangle.$$

Επομένως, εάν:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots,$$

θα είναι:

$$\frac{\langle u^{(\kappa)} / v^{(\kappa)} \rangle}{\langle u^{(\kappa)} / v^{(\kappa-1)} \rangle} = \lambda_1 + \mathrm{O}[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2\kappa}].$$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να υιοθετηθεί ιδιαίτερα αποτελεσματικά στην περίπτωση των συμμετρικών πινάκων, γιατί εάν $u^{(0)} = v^{(0)}$ τότε $u^{(\kappa)} = v^{(\kappa)}$ για κάθε κ.

II.1.3. ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΛΛΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, με την βοήθεια μίας από τις προηγούμενες μεθόδους, έχουμε καταφέρει να προσδιορίσουμε την ιδιοτιμή λ_1 του A που έχει μεγαλύτερο μέτρο και ενδεχομένως το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $z^{(1)}$ του A.

Το πρόβλημα που εγείρεται εύλογα είναι ο προσδιορισμός της ιδιοτιμής λ_2 εκείνης του A που έχει το αμέσως μικρότερο μέτρο από το $|\lambda_1|$.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι, που είναι ριζικά διαφορετικοί μεταξύ τους, για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος :

- Η μεταβολή της αρχικής επαναληπτικής μεθόδου προκειμένου να επιτευχθεί σύγκλιση της μεθόδου προς την ιδιοτιμή λ_2. Πρόκειται για την ***μέθοδο της $\lambda -$ διαφοράς***.
- Η μεταβολή του πίνακα A έτσι ώστε ο καινούργιος πίνακας να έχει τις ιδιοτιμές: 0 (αντί για λ_1), $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Πρόκειται για την ***μέθοδο της ύφεσης***.

II.1.3.(i). Η Μέθοδος της λ-Διαφοράς. Επειδή:

$$u^{(\kappa+1)} - \lambda_1 . u^{(\kappa)} = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2^{\kappa} \cdot z^{(2)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) \lambda_i^{\kappa} \cdot z^{(i)} ,$$

έχουμε:

$$\frac{(u^{(\kappa+2)} - \lambda_1 \cdot u^{(\kappa+1)})_j}{(u^{(\kappa+1)} - \lambda_1 \cdot u^{(\kappa)})_j} = \lambda_2 + \mathrm{O}[\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{\kappa}] .$$

Είναι φανερό ότι αυτός ο λόγος συγκλίνει, μαζί με το $\kappa \to \infty$, προς το λ_2, εάν $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

II.1.3.(ii). Η Μέθοδος της Ύψεσης. Έστω $z^{(i)}$ το ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και έστω $w^{(i)}$ το ιδιοδιάνυσμα του A^T που αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή λ_i.

Θυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την *Πρόταση Ι.5.2.1*, οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, και ότι, σύμφωνα με την *Πρόταση Ι.5.2.2*, $\langle z^{(i)} / w^{(j)} \rangle = 0$ εάν $i \neq j$.

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα A_1 που ορίζεται από τον *Τύπο*:

$$A_1 = A - \lambda_1 \frac{z^{(1)} \cdot [w^{(1)}]^T}{\langle z^{(1)} / w^{(1)} \rangle} .$$

Ο πίνακας αυτός έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Πράγματι, αφ' ενός ισχύει:

$$A_1 \cdot z^{(1)} = A \cdot z^{(1)} - \lambda_1 \frac{z^{(1)} \cdot [w^{(1)}]^T \cdot z^{(1)}}{\langle z^{(1)} / w^{(1)} \rangle} = \lambda_1 \cdot z^{(1)} - \lambda_1 z^{(1)} \cdot \frac{\langle z^{(1)} / w^{(1)} \rangle}{\langle z^{(1)} / w^{(1)} \rangle} = 0 ,$$

που σημαίνει ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του A_1 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $z^{(1)}$, ενώ αφ' ετέρου είναι:

$$A_1 \cdot z^{(i)} = A \cdot z^{(i)} - \lambda_1 \frac{z^{(1)} \cdot [w^{(1)}]^T \cdot z^{(i)}}{\langle z^{(1)} / w^{(1)} \rangle} = \lambda_i \cdot z^{(i)} - \lambda_1 \cdot z^{(1)} \frac{\langle z^{(i)} / w^{(1)} \rangle}{\langle z^{(1)} / w^{(1)} \rangle} = \lambda_i \cdot z^{(i)},$$

(για κάθε $i > 1$), σχέση που εγγυάται ότι το λ_i είναι ιδιοτιμή του A_1 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το διάνυσμα $z^{(i)}$.

Το μειονέκτημα της μεθόδου της ύφεσης είναι ότι προϋποθέτει τον υπολογισμό του $w^{(1)}$.

Εάν ο πίνακας A είναι συμμετρικός τότε $z^{(1)} = w^{(1)}$ και αυτή η μέθοδος φαίνεται πως υπερέχει.

Εν τούτοις, στην πράξη, αυτή η μέθοδος της ύφεσης παρουσιάζει ασθενή αριθμητική σταθερότητα, και, τις περισσότερες φορές, η εφαρμογή της αντενδείκνυται. Συνήθως, προτιμάται μία διαφορετική μέθοδος ύφεσης, στην οποία γίνεται χρήση ενός ορθογωνίου μετασχηματισμού. Την μέθοδο αυτή θ' αναπτύξουμε στην συνέχεια.

Έστω H ένας $n \times n$ κανονικός πίνακας, τέτοιος ώστε:

$$H \cdot z^{(1)} = \lambda \cdot e^{(1)} \qquad (\lambda \neq 0).$$

Τότε η ισότητα $A \cdot z^{(1)} = \lambda_1 \cdot z^{(1)}$ μπορεί να γραφεί διαδοχικά ως εξής :

$$H \cdot A \cdot (H^{-1} \cdot H) \cdot z^{(1)} = \lambda_1 \cdot H \cdot z^{(1)} \Leftrightarrow H \cdot A \cdot H^{-1} \cdot e^{(1)} = \lambda_1 \cdot e^{(1)}.$$

Η τελευταία σχέση εξασφαλίζει ότι η πρώτη στήλη του πίνακα $A_1 = H \cdot A \cdot H^{-1}$ είναι ίση με $\lambda_1 \cdot e^{(1)}$, δηλαδή ότι ο πίνακας A_1 είναι της μορφής :

$$A_1 = H \cdot A \cdot H^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & m^T \\ 0 & \\ 0 & M \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

όπου m είναι κάποιο διάνυσμα του $\mathbb{R}^{n-1}$ και όπου M είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n-1$ που έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

Αν συμβολίσουμε με $u^{(2)}$ το ιδιοδιάνυσμα του A_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 και αν γράψουμε το $u^{(2)}$ υπό την μορφή :

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ v^{(2)} \end{pmatrix},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $v^{(2)}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα του M που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2, τότε:

$$A_1 \cdot u^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & m^T \\ 0 & \\ 0 & M \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ v^{(2)} \end{pmatrix}$$

και επομένως, η ιδιοτιμή λ_2 προκύπτει από την σχέση:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha + \langle m / v^{(2)} \rangle = 0.$$

Όσον αφορά στον υπολογισμό του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος $z^{(2)}$, έχουμε ότι :

$$H \cdot A \cdot H^{-1} \cdot u = \lambda_2 \cdot u^{(2)} \Rightarrow A \cdot H^{-1} \cdot u^{(2)} = \lambda_2 \cdot H^{-1} \cdot u^{(2)} \Leftrightarrow z^{(2)} = H^{-1} \cdot u^{(2)}.$$

Η κατασκευή του πίνακα *H* πραγματοποιείται, σύμφωνα με την μέθοδο του Householder, ως εξής: Αφού επιλέξουμε διάνυσμα $\sigma \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\|\sigma\|^2 = \langle \sigma / \sigma \rangle = 1,$$

θέτουμε:

$$H = \mathrm{I} - 2\sigma \cdot \sigma^T,$$

και παρατηρούμε ότι ο πίνακας H είναι ορθογώνιος και συμμετρικός.

Επί πλέον, ισχύει

$$\left\| H \cdot z^{(1)} \right\| = \left\| z^{(1)} \right\|$$

και συνεπώς, εάν $H \cdot z^{(1)} = \lambda \cdot e^{(1)}$ για κάποιο $\lambda \neq 0$, τότε $|\lambda| = \left\| z^{(1)} \right\|$. Συμβολίζοντας με μ το γινόμενο

$$\mu = 2\langle \sigma / z^{(1)} \rangle,$$

διαπιστώνουμε ότι, εάν $H \cdot z^{(1)} = \lambda \cdot e^{(1)}$, για κάποιο $\lambda \neq 0$, τότε:

$$(\mathrm{I} - 2\sigma \cdot \sigma^{\mathrm{T}}) \cdot z^{(1)} = \lambda \cdot e^{(1)} \Leftrightarrow z^{(1)} - 2\mu \cdot \sigma = \lambda \cdot e^{(1)},$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την τελευταία ισότητα με το διάνυσμα $2 \cdot \sigma^{\mathrm{T}}$, βρίσκουμε $\mu^2 = 2\lambda(\lambda - \alpha_1)$. Αυτές οι εξισώσεις προσδιορίζουν τα $\sigma \in \mathbb{R}^n$, λ και $\mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να είναι $H \cdot z^{(1)} = \lambda \cdot e^{(1)}$.

ΙΙ.2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΜΕΣΟΥ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Θεωρητικά, η πιο απλή ιδέα για τον υπολογισμό όλων των ιδιοτιμών ενός πίνακα συνίσταται στον υπολογισμό των συντελεστών του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου.

Προφανώς, μία μέθοδος που περιγράφει έναν τέτοιον υπολογισμό είναι και η πιο άμεση. Πρακτικά όμως, όλες αυτές οι μέθοδοι αντιμετωπίζονται με επιφύλαξη και φειδώ, γιατί είναι αριθμητικά ασταθείς. Εν τούτοις, θα παρουσιάσουμε ενδεικτικά μία απ' αυτές τις μεθόδους, γιατί αυτή η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμεύει σε τυπικές πράξεις που γίνονται κατά τον προγραμματισμό ενός υπολογιστικού μηχανήματος, όπως για παράδειγμα στην τυπική πράξη εύρεσης του αντιστρόφου πίνακα ενός δοθέντος άλλου.

II.2.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ SOURIAU

Η ***μέθοδος Souriau*** προέρχεται από την παραλλαγή μίας άλλης μεθόδου που επινοήθηκε από τον *Leverrier*.

Έστω A ένας $n \times n$ τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας. Θέτουμε:

$$A_1 := A, \qquad \mathrm{a}_1 := tr(A_1), \qquad B_1 := A_1 - \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{I}$$

$$A_2 := B_1 \cdot A, \qquad \mathrm{a}_2 := \frac{1}{2} tr(A_2), \qquad B_2 := A_2 - \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{I}$$

$$A_3 := B_2 \cdot A, \qquad \mathrm{a}_3 := \frac{1}{3} tr(A_3), \qquad B_3 := A_3 - \mathrm{a}_3 \cdot \mathrm{I}$$

.....

$$A_n := B_{n-1} \cdot A, \qquad \mathrm{a}_n := \frac{1}{n} tr(A_n), \qquad B_n := A_n - \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I}$$

Εάν $P(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε :

Θεώρημα II.2.1.1.

$$P(\lambda) = (-1)^n \, (\lambda^n - \mathrm{a}_1 \, \lambda^{n-1} - \ldots - \mathrm{a}_{n-1} \, \lambda - \mathrm{a}_n)$$

και

$$B_n = 0.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το $P(\lambda)$ είναι της μορφής:

$$\mathrm{P}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathrm{I}) = (-1)^n \, (\lambda^n - c_1 \, \lambda^{n-1} - \ldots - c_{n-1} \, \lambda - c_n).$$

Κατ' αρχάς, είναι σαφές ότι, εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές του A, τότε:

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = tr(A_1) = \mathrm{a}_1.$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, θα δείξουμε ότι $c_\kappa = \mathrm{a}_\kappa$, για κάθε $\kappa = 2,3,\ldots,n$. Προς τούτο, θα δεχθούμε ότι έχουμε ήδη αποδείξει ότι $c_1 = \mathrm{a}_1, c_2 = \mathrm{a}_2, \ldots, c_{\kappa-1} = \mathrm{a}_{\kappa-1}$, και θα ενεργήσουμε ως εξής : Επειδή

$$A_\kappa = B_{\kappa-1} \cdot A = (A_{\kappa-1} - \mathrm{a}_{\kappa-1} \cdot \mathrm{I}) \cdot A = A_{\kappa-1} \cdot A - \mathrm{a}_{\kappa-1} \cdot A,$$

αλλά κι επειδή

$$A_{\kappa-1} = A_{\kappa-2} \cdot A - \mathrm{a}_{\kappa-2} \cdot A,$$

έχουμε ότι:

$$A_\kappa = A_{\kappa-2} \cdot A^2 - \mathrm{a}_{\kappa-2} \cdot A^2 - \mathrm{a}_{\kappa-1} \cdot A,$$

και, κατ' ακολουθία:

$$A_\kappa = A^\kappa - \mathrm{a}_1 \cdot A^{\kappa-1} - \mathrm{a}_2 \cdot A^{\kappa-2} - \ldots - \mathrm{a}_{\kappa-1} \cdot A.$$

Η τελευταία αυτή ισότητα γίνεται, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης :

$$A_\kappa = A^\kappa - c_1 \cdot A^{\kappa-1} - c_2 \cdot A^{\kappa-2} - \ldots - c_{\kappa-1} \cdot A.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις *σχέσεις του Newton* μεταξύ ριζών και συντελεστών πολυωνύμου, διαπιστώνουμε ότι:

$$tr(A_\kappa) = tr(A^\kappa) - c_1\, tr(A^{\kappa-1}) - \ldots - c_{\kappa-1}\, tr(A) = \kappa\, c_\kappa$$

και άρα:

$$\frac{1}{\kappa}\, tr(A_\kappa) = \mathrm{a}_\kappa = c_\kappa.$$

Απομένει να δειχθεί ότι $B_n = 0$. Αυτό είναι μία άμεση εφαρμογή του *Θεωρήματος Cayley-Hamilton* (*Πρόταση Ι.5.2.9*) :

$$\begin{aligned} B_n &= A_n - \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I} = \\ &= B_{n-1} \cdot A - \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I} = \\ &= (A_{n-1} - \mathrm{a}_{n-1} \cdot \mathrm{I}) \cdot A - \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I} = \\ &= A^n - \mathrm{a}_1 \cdot A^{n-1} - \ldots - \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι πλήρης. ■

Όπως επισημάνθηκε και πιο πάνω, η μέθοδος που περιγράφεται από το προηγούμενο *Θεώρημα* δεν είναι πρακτικά χρήσιμη, γιατί είναι αριθμητικά ασταθής.

Από την άλλη μεριά όμως παρέχει μεγάλες υπηρεσίες στην αποτελεσματικότητα των προγραμμάτων που αποσκοπούν στον υπολογισμό αντίστροφου πίνακα:

Πόρισμα ΙΙ.2.1.1. ***Ισχύει ο Τύπος:*** $A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{a}_n} \cdot B_{n-1}$.

Απόδειξη. Επειδή $B_n = 0$, βλέπουμε ότι:

$$A_n = \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I} \Rightarrow B_{n-1} \cdot A = \mathrm{a}_n \cdot \mathrm{I}.$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με A^{-1} την τελευταία ισότητα , βρίσκουμε :

$$B_{n-1} \cdot A \cdot A^{-1} = \mathrm{a}_n \cdot A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{a}_n} \cdot B_{n-1}. \blacksquare$$

ΙΙ.3. Η ΜΟΡΦΗ HESSENBERG

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ *λέγεται ότι είναι σε* ***(άνω) μορφή Hessenberg****, εάν:*

$$a_{i,j} = 0, \quad \text{για} \quad i > j+1 \quad \text{και} \quad j = 1,\ldots,n-1,$$

δηλαδή εάν ο A είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{2,n-1} \\ & & a_{4,3} & & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ & \mathrm{O} & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Οι πίνακες Hessenberg διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο σε πολλές μεθόδους υπολογισμού ιδιοτιμών.

Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα δεν γνωρίζουμε πώς μπορεί να αποδειχθεί η σύγκλιση της μεθόδου παρά μόνον όταν ο πίνακας του οποίου αναζητούμε τις ιδιοτιμές είναι της μορφής Hessenberg.

Όμως, όλη η σπουδαιότητα των πινάκων Hessenberg εντοπίζεται στο γεγονός ότι ***για κάθε πραγματικό πίνακα A υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας:***

$$H = P^T \cdot A \cdot P$$

να είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg.

Αυτό το σπουδαίο αποτέλεσμα θα αποδειχθεί πιο κάτω με κατασκευαστικούς τρόπους, δηλαδή με την περιγραφή μεθόδων που διατυπώνουν την σταδιακή μεταβολή του A με καταληκτικό αποτέλεσμα τον πίνακα H.

Υπάρχουν δύο τέτοιες βασικές μέθοδοι. Μέσα απ' αυτές τις δύο μεθόδους επιχειρείται η πραγματοποίηση μίας διαδοχής ορθογώνιων μετασχηματισμών, θέτοντας

$$A_0 := A$$

και μετά:

$$A_k := (a_{i,j}^{(k)}) = P_k^T \cdot A_{k-1} \cdot P_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n-2),$$

όπου ο πίνακας A_{k-1} είναι της ενδεικτικής μορφής (για $n = 6$, $k = 3$):

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} x & x & x & |x & x & x \\ x & x & x & |x & x & x \\ 0 & x & x & |x & x & x \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & |x & |x & x & x \\ 0 & 0 & |x & |x & x & x \\ 0 & 0 & |x & |x & x & x \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} k \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-k \end{matrix}$$

Ο πίνακας A_{n-2} είναι όμοιος με τον A και επί πλέον είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg.

Η πρώτη μέθοδος παρουσιάστηκε το 1954 από τον *Givens*, και καταφεύγει στην χρήση πινάκων στροφής του επιπέδου. Η δεύτερη μέθοδος προτάθηκε το 1958 από τον *Householder*, και στηρίζεται στην χρήση στοιχειωδών ορθογωνίων πινάκων.

II.3.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ GIVENS

Έστω $A = (a_{i,j})$ ένας τυχαίος πραγματικός $n \times n$ πίνακας και έστω $Q_{p,q}$ ο ακόλουθος πίνακας :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & p\downarrow & & & & q\downarrow & & & \end{array} \\
Q_{p,q} = & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & \cos\theta & & & & \sin\theta & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & \sin\theta & & & & \cos\theta & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του $Q_{p,q}$ είναι ίσα με μηδέν.

Θέτουμε:

$$C = (c_{i,j}) := Q_{p,q}^T \cdot A \cdot Q_{p,q},$$

και διαπιστώνουμε ότι:

$c_{i,j} = a_{i,j}$, όταν $i \neq p$ και $j \neq q$,

$c_{i,p} = a_{i,p}\cos\theta + a_{i,q}\sin\theta$, όταν $i \neq p$ και $i \neq q$,

$c_{p,j} = a_{p,j}\cos\theta + a_{q,j}\sin\theta$, όταν $j \neq p$ και $j \neq q$,

$c_{i,q} = -a_{i,p}\sin\theta + a_{j,p}\cos\theta$, όταν $i \neq p$ και $i \neq q$,

$c_{q,j} = -a_{p,j}\sin\theta + a_{q,j}\cos\theta$, όταν $j \neq p$ και $j \neq q$,

$c_{p,p} = a_{p,p}\cos^2\theta + (a_{p,q} + a_{q,p})\sin\theta\cos\theta + a_{q,q}\sin^2\theta$,

$c_{q,q} = a_{p,p}\sin^2\theta - (a_{p,q} + a_{q,p})\sin\theta\cos\theta + a_{q,q}\cos^2\theta$,

$c_{p,q} = a_{p,q}\cos^2\theta + (a_{q,q} - a_{p,p})\sin\theta\cos\theta - a_{q,p}\sin^2\theta$,

$c_{q,p} = a_{q,p}\cos^2\theta + (a_{q,q} - a_{p,p})\sin\theta\cos\theta - a_{p,q}\sin^2\theta$.

Η επιλογή του θ μπορεί να γίνει έτσι ώστε:

$$c_{q,p-1} = 0.$$

Τότε, θα ισχύει ότι:

$$-a_{p,p-1}\sin\theta + a_{q,p-1}\cos\theta = 0.$$

Εάν $a_{q,p-1} = 0$, παίρνουμε $\theta = 0$, οπότε θα είναι $Q_{p,q} = \mathrm{I}$.

Με τον δείκτη p σταθερό, εάν αφήσουμε τον δείκτη q να διατρέχει τις τιμές από $p+1$ έως n, βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο της $(p-1)-$στήλης, που ήταν ή έγινε μόλις ίσο με το μηδέν, δεν μεταβάλλεται από τους διαδοχικούς μετασχηματισμούς. Έτσι, θεωρώντας τους πίνακες:

$$P_k = \prod_{q=k+2}^{n} Q_{k+1,q},$$

καταφέρνουμε να μηδενίσουμε διαδοχικά τα στοιχεία:

$$a_{i,k+1} \quad (i = k+2,\ldots,n),$$

και συνεπώς να καταλήξουμε στον πίνακα A_{n-2} που είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg.

Από αλγοριθμικής άποψης, η προηγούμενη μέθοδος συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα:

Για $k = 1,2,\ldots,n-2$ ***και*** $i = k+2, k+3,\ldots,n,$

- ***Υπολογίζουμε τον αριθμό:***

$$x = [(a_{k+1,k}^{(k-1)})^2 + (a_{i,k}^{(k-1)})^2]^{\frac{1}{2}},$$

- ***Μετά, συνεχίζουμε, υπολογίζοντας τους αριθμούς:***

$$\cos\theta = \frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{x} \quad \textbf{\textit{και}} \quad \sin\theta = \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{x}.$$

Εάν $x = 0$ ***τότε να τεθεί :***

$$\theta = 0, \qquad a_{k+1,k}^{(k)} = x, \qquad a_{i,k}^{(k)} = 0.$$

- ***Για*** $j = k+1,\ldots,n,$ ***να τεθεί:***

$$a_{k+1,j}^{(k)} = a_{k+1,j}^{(k-1)}\cos\theta + a_{i,j}^{(k-1)}\sin\theta$$

και

$$a_{i,j}^{(k)} = -a_{k+1,j}^{(k-1)}\sin\theta + a_{i,j}^{(k-1)}\cos\theta.$$

- ***Για*** $j = 1,2,\ldots,n,$ ***να τεθεί:***

$$a_{j,k+1}^{(k)} = a_{j,k+1}^{(k-1)}\cos\theta + a_{j,i}^{(k-1)}\sin\theta$$

και

$$a_{j,i}^{(k)} = -a_{j,k+1}^{(k-1)}\sin\theta + a_{j,i}^{(k-1)}\cos\theta.$$

Παρατηρήσεις II.3.1.1.(i). Το τρίτο βήμα αναπαριστά το αποτέλεσμα της πράξης $P_k^T \cdot A_{k-1}$, ενώ το τέταρτο βήμα περιέχει την πράξη $P_k^T \cdot A_{k-1} \cdot P_k$.

(ii). Το πέρασμα από τον πίνακα A_0 στον πίνακα A_{n-2} απαιτεί περίπου $\frac{10}{3} n^3$ πολλαπλασιασμούς.

(iii). Εάν ο πίνακας A είναι συμμετρικός, τότε και οι διαδοχικοί πίνακες A_k είναι επίσης συμμετρικοί. Επομένως , η (άνω) μορφή Hessenberg γίνεται τριδιαγώνια και η μέθοδος Givens είναι μία μέθοδος αναγωγής ενός συμμετρικού πίνακα σε έναν τριδιαγώνιο πίνακα όμοιό του.

II.3.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ HOUSEHOLDER

Η μέθοδος αυτή συνοψίζεται στο παρακάτω σκεπτικό. Θέτουμε:

$$A_{k-1} := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & H_{k-1} & & & C_{k-1} & \\ - & - & - & - & - & - \\ \mathrm{O} & | & \mathrm{b}_{k-1} & & B_{k-1} & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} n-k \end{array}$$

όπου H_{k-1} είναι πίνακας σε (άνω) μορφή Hessenberg και εκφράζουμε τον πίνακα P_k όπως ακολούθως:

$$P_k = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ - & - \\ \mathrm{O} & Q_k \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} k \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} n-k \end{array} ,$$

όπου $Q_k = \mathrm{I} - 2 \cdot \nu_k \cdot \nu_k^T$, με $\nu_k \in \mathbb{R}^{n-k}$ και $\langle \nu_k / \nu_k \rangle = 1$.

Τότε:

$$A_k = P_k \cdot A_{k-1} \cdot P_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} & | & C_{k-1} \cdot Q_k \\ - \quad - \quad - & | & - \quad - \quad - \\ \mathrm{O} \quad | \quad Q_k \cdot \mathrm{b}_{k-1} & | & Q_k \cdot B_{k-1} \cdot Q_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} H \\ - \\ O \end{matrix}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} - \\ - \\ O \end{matrix}}\right\} n-k \end{matrix}$$

και αν επιλέξουμε τον πίνακα Q_k έτσι ώστε όλες οι συνιστώσες του διανύσματος $Q_k \cdot \mathrm{b}_{k-1}$ να είναι μηδενικές εκτός από την πρώτη (και φυσικά γνωρίζουμε ότι αυτό είναι δυνατόν), τότε ο κύριος υποπίνακας διάστασης $k+1$ θα είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε τους προηγούμενους *Τύπους*, εισάγοντας στους υπολογισμούς μας το διάνυσμα $w_k \in \mathbb{R}^n$, του οποίου οι k πρώτες συνιστώσες είναι μηδενικές, και το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\langle w_k / w_k \rangle = 1$.

Τότε , ο πίνακας P_k θα γράφεται σαν:

$$P_k = \mathrm{I} - 2\, w_k \cdot w_k^T = \mathrm{I} - \frac{\sigma_k \cdot \sigma_k^T}{2\,\tau_k^2},$$

όπου $\sigma_k = \left((\sigma_k)_1, \ldots, (\sigma_k)_n\right) \in \mathbb{R}^n$, $\tau_k \in \mathbb{R}$ και:

$$(\sigma_k)_1 = \ldots = (\sigma_k)_k = 0,$$

$$(\sigma_k)_{k+1} = a_{k+1,k}^{(k-1)} \mp \pi_k \text{, με } \pi_k = [\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} (a_{i,k}^{(k-1)})^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$(\sigma_k)_i = a_{i,k}^{(k-1)} \text{, για } i = k+2, \ldots, n,$$

και:

$$2\,\tau_k^2 = \pi_k^2 \mp a_{k+1,k}^{(k-1)}\, \pi_k ,$$

ενώ ο πίνακας $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \le i,j \le n}$ θα είναι τέτοιος ώστε:

$$a_{k+1,k}^{(k)} = \pm \pi_k .$$

Το πρόσημο $\pm$ μπροστά από το π_k είναι αυτό του $a_{k+1,k}^{(k-1)}$, προκειμένου η συνιστώσα $(\sigma_k)_{k+1}$ να μην είναι μηδέν.

Παρατηρήσεις II.3.2.1.(i). Το πέρασμα από τον πίνακα A_0 στον πίνακα A_{n-2} απαιτεί περίπου $\frac{5}{3}n^3$ πολλαπλασιασμούς.

(ii). Εάν ο πίνακας A_0 είναι συμμετρικός, τότε όλοι οι πίνακες A_k είναι συμμετρικοί, και επομένως ο πίνακας A_{n-2} είναι τριδιαγώνιος.

(iii). Οι μέθοδοι Givens και Householder δεν είναι τελείως ανεξάρτητες. Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι οι πίνακες των δύο μετασχηματισμών είναι ταυτόσημοι με πολλαπλασιαστικούς παράγοντες που διαφέρουν ως προς το πρόσημο της κάθε στήλης τους.■

II.4. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΑ ΜΟΡΦΗ

Η αναγωγή πίνακα σε όμοιό του, τριδιαγώνιο πίνακα είναι πράξη ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, γιατί, μετά από μία τέτοια αναγωγή, ο υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι εύκολος. Εάν:

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 & & & & \\ \gamma_1 & a_2 & \beta_2 & & \mathrm{O} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & & \gamma_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

είναι ένας τριδιαγώνιος πραγματικός πίνακας διάστασης *n*, τότε συμβολίζουμε με $P_n(\lambda)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο:

$$P_n(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_1 - \lambda & \beta_1 & & & & \\ \gamma_1 & a_2 - \lambda & \beta_2 & & \mathrm{O} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & & \gamma_{n-1} & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά την τελευταία στήλη (ή την τελευταία γραμμή), αποκομίζουμε την σχέση:

$$P_n(\lambda) = (a_n - \lambda) P_{n-1}(\lambda) - \beta_{n-1} \gamma_{n-1} P_{n-2}(\lambda).$$

Είναι σαφές ότι, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την επαγωγική σχέση, πρέπει προηγουμένως να εξασφαλίσουμε την ακριβή έκφραση των πολυωνύμων

$$P_0(\lambda) \text{ και } P_1(\lambda).$$

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι:

$$P_1(\lambda) = a_1 - \lambda$$

και ότι, για

$$P_0(\lambda) = 1,$$

το πολυώνυμο

$$P_2(\lambda) = (a_2 - \lambda)(a_1 - \lambda) - \beta_1 \gamma_1$$

είναι πράγματι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τριδιαγώνιου τετραγωνικού πίνακα διάστασης 2:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Μετά απ' αυτό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως:

$$P_0(\lambda) = 1,$$

και να κατοχυρώσουμε την ευχέρεια χρήσης της πιο πάνω επαγωγικής σχέσης για τον υπολογισμό του αριθμού $P_n(\lambda)$ για κάθε τιμή του λ.

Ας παρουσιάσουμε τώρα κάποιες ιδιότητες των ριζών των πολυωνύμων $P_n(\lambda)$:

Ιδιότητα 1. ***Εάν $\beta_j \gamma_j \neq 0$ για κάθε j, τότε τα πολυώνυμα $P_n(\lambda)$ και $P_{n-1}(\lambda)$ δεν έχουν κοινή ρίζα $(n = 1,2,...)$.***

Ιδιότητα 2. ***Εάν $\beta_j \gamma_j > 0$ για κάθε j, τότε οι ρίζες του $P_{n+1}(\lambda)$ είναι πραγματικές, απλές και διαχωρίζονται απ' αυτές του $P_n(\lambda)$.***

Ιδιότητα 3. ***Εάν $\beta_j \gamma_j > 0$ για κάθε j, και εάν a είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $P_n(\mathrm{a}) \neq 0$, τότε ο αριθμός V(a) των ριζών του $P_n(\lambda)$ που είναι μεγαλύτερες του a είναι ίσος με τον αριθμό S(a) των αλλαγών προσήμων στην ακολουθία:***

$$1, -P_1(\mathrm{a}), P_2(\mathrm{a}), -P_3(\mathrm{a}), ..., (-1)^n . P_n(\mathrm{a}).$$

Η απόδειξη της *Ιδιότητας 1* γίνεται με απαγωγή στο άτοπο: Εάν τα πολυώνυμα $P_n(\lambda)$ και $P_{n-1}(\lambda)$ είχαν μία κοινή ρίζα, έστω τον αριθμό a, τότε θα ίσχυε ότι

$$P_n(\mathrm{a}) - (a_n - \mathrm{a})\, P_{n-1}(\mathrm{a}) = -\beta_{n-1}\, \gamma_{n-1}\, P_{n-2}(\mathrm{a}) = 0,$$

οπότε, επειδή από την υπόθεση $\beta_{n-1}\, \gamma_{n-1} \neq 0$, θα ήταν και $P_{n-2}(\mathrm{a}) = 0$. Διαδοχικές επαναλήψεις αυτού του σκεπτικού θα οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι $P_0(\mathrm{a}) = 0$, που είναι άτοπο γιατί $P_0(\lambda) = 1$.

Η απόδειξη της *Ιδιότητας 2* γίνεται με μαθηματική επαγωγή: Προφανώς το $P_1(\lambda)$ έχει μοναδική, πραγματική και απλή ρίζα το a_1. Ας μελετήσουμε τις ρίζες του $P_2(\lambda)$. Επειδή

$$P_2(\lambda) = (a_2 - \lambda)(a_1 - \lambda) - \beta_1\, \gamma_1 = \lambda^2 - (a_1 + a_2)\,\lambda + (a_1\, a_2 - \beta_1\, \gamma_1),$$

η διακρίνουσα Δ του $P_2(\lambda)$ είναι ίση με $\Delta = (a_1 - a_2)^2 + 4\,\beta_1\, \gamma_1$ και, εφόσον $\beta_1\, \gamma_1 > 0$, θα είναι $\Delta > 0$ και το τριώνυμο $P_2(\lambda)$ θα έχει δύο απλές πραγματικές ρίζες. Μάλιστα επειδή $P_2(a_1) = -\beta_1\, \gamma_1 < 0$, η ρίζα a_1 του $P_1(\lambda)$ θα περιέχεται στο διάστημα μεταξύ των δύο ριζών του $P_2(\lambda)$, δεδομένου ότι ο συντελεστής του λ^2 στην τριωνυμική έκφραση του $P_2(\lambda)$ είναι θετικός.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ιδιότητα είναι αληθής για τα πολυώνυμα $P_3(\lambda), P_4(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)$ και δείξουμε ότι παραμένει αληθής και για το $P_n(\lambda)$. Προς τούτο, ας συμβολίσουμε με:

$t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ τις ρίζες του πολυωνύμου $P_{n+1}(\lambda)$,

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ τις ρίζες του πολυωνύμου $P_n(\lambda)$,

$r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ τις ρίζες του πολυωνύμου $P_{n-1}(\lambda)$.

Τότε, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, ισχύει:

$$s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < s_3 < \ldots < s_{n-1} < r_{n-1} < s_n,$$

ενώ, προφανώς, είναι:

$$P_n(\lambda) = (s_1 - \lambda)(s_2 - \lambda)\ldots(s_n - \lambda),$$

$$P_{n-1}(\lambda) = (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda)\ldots(r_{n-1} - \lambda).$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες ισότητες, αλλά και την βασική σχέση $P_{n+1}(\lambda) = (a_{n+1} - \lambda)P_n(\lambda) - \beta_n \gamma_n P_{n-1}(\lambda)$, βρίσκουμε ότι:

$$P_{n+1}(\lambda) = (a_{n+1} - \lambda)(s_1 - \lambda)\ldots(s_n - \lambda) - \beta_n \gamma_n (r_1 - \lambda)\ldots(r_{n-1} - \lambda),$$

και ειδικότερα, όταν $\lambda = s_j \quad (j = 1,2,\ldots,n)$, έχουμε:

$$P_{n+1}(s_j) = 0 - \beta_n \gamma_n \underbrace{(r_1 - s_j)(r_{j-1} - s_j)}_{\substack{\text{έχει πρόσημο} \\ \text{αυτό του } (-1)^{n-1}}} \underbrace{(r_{n-1} - s_j)}_{>0}.$$

Επειδή από την υπόθεση, $\beta_n \gamma_n > 0 \Leftrightarrow -\beta_n \gamma_n < 0$, έπεται ότι το πρόσημο του αριθμού $P_{n+1}(s_j)$ είναι αυτό του αριθμού $(-1)^n$. Επομένως , υπάρχει μία ρίζα του $P_{n+1}(\lambda)$ ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες του $P_n(\lambda)$, δηλαδή:

$$s_1 < t_2 < s_2 < t_3 < s_3 < \ldots < s_{n-1} < t_n < s_n.$$

Επί πλέον, ο όρος με τον μεγαλύτερο βαθμό δύναμης του $P_{n+1}(\lambda)$ είναι ο όρος $(-1)^{n+1}\lambda^{n+1}$, με συνέπεια οι αριθμοί $P_{n+1}(\lambda)$ να τείνουν προς το $+\infty$ όταν τα αντίστοιχα λ τείνουν προς το $-\infty$.

Καθώς όμως $P_{n+1}(s_1) < 0$, υπάρχει μια ρίζα t_1 του $P_{n+1}(\lambda)$ μικρότερη από το s_1:

$$t_1 < s_1.$$

Από την άλλη μεριά, το πρόσημο του αριθμού $P_{n+1}(s_n)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του αριθμού $(-1)^n$, ενώ οι αριθμοί $P_{n+1}(\lambda)$ τείνουν προς το $(-1)^{n+1} \times (+\infty)$ όταν τα αντίστοιχα λ τείνουν προς το $+\infty$, με συνέπεια να υπάρχει μία ρίζα t_{n+1} του $P_{n+1}(\lambda)$ μεγαλύτερη από το s_n:

$$s_n < t_{n+1}.$$

Τελικά, ισχύει:

$$t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < t_3 < \ldots < t_n < s_n < t_{n+1},$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη της *Ιδιότητας 2*.

Όσον αφορά στην απόδειξη της *Ιδιότητας 3*, επισημαίνουμε μόνον ότι η ακολουθία πολυωνύμων $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)$ είναι μία *ακολουθία Sturm*: ο αριθμός των ριζών που ανήκουν στο ανοικτό διάστημα $]a,b[$ είναι ίσος με $V(a) - V(b)$.

Πριν προχωρήσουμε στις μεθόδους αναγωγής τετραγωνικού πίνακα σε όμοιό του, τριδιαγώνιο πίνακα, κρίνουμε απαραίτητο να προβούμε σε κάποιες πρόσθετες επισημάνσεις και σχόλια.

Καταρχήν, εάν ο τριδιαγώνιος πίνακας *A* είναι συμμετρικός και τέτοιος ώστε $\beta_j \neq 0 \ \forall j$, τότε οι τρεις προηγούμενες ιδιότητες επαληθεύονται, γιατί $\gamma_j = \beta_j \Rightarrow \beta_j \gamma_j = \beta_j^2 > 0$.

Ακόμη, θυμίζουμε ότι μία ακολουθία πολυωνύμων είναι ***ακολουθία Sturm***, εάν δύο διαδοχικά πολυώνυμα της ακολουθίας δεν μηδενίζονται στα ίδια σημεία και εάν σε κάθε ρίζα ενός πολυωνύμου της ακολουθίας τα δύο προσκείμενα σ' αυτό πολυώνυμα έχουν αντίθετα πρόσημα.

Εξ' άλλου, εάν κανείς θελήσει να υπολογίσει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_n(\lambda)$, χρησιμοποιώντας την επαγωγική σχέση:

$$P_n(\lambda) = (a_n - \lambda)\, P_{n-1}(\lambda) - \beta_{n-1}\, \gamma_{n-1}\, P_{n-2}(\lambda),$$

είναι υποχρεωμένος να ξαναρχίζει τους υπολογισμούς για κάθε τιμή του λ.

Μπορούμε να αποφύγουμε την επίπονη αυτή διαδικασία, υπολογίζοντας μία και μόνον φορά τους συντελεστές του $P_n(\lambda)$ όπως ακολούθως.

Θέτουμε:

$$P_n(\lambda) = A_0^{(n)}\, \lambda^n + A_1^{(n)}\, \lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}^{(n)}\, \lambda + A_n^{(n)},$$

και χρησιμοποιούμε την επαγωγική σχέση, προκειμένου να βρούμε:

$$A_j^{(n+1)} = A_j^{(n)} - a_{n+1}\, A_{j-1}^{(n)} - \beta_n\, \gamma_n\, A_{j-2}^{(n-1)} \qquad (j = 0,1,\ldots,n+1),$$

με:

$$A_1^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$A_j^{(p)} = 0 \text{ εάν } j > p \text{ και } A_0^{(n)} = 1.$$

Τέλος, ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων ενός τριδιαγώνιου πίνακα A είναι ιδιαίτερα απλός:

Έστω λ μία ιδιοτιμή του A και έστω $x = (x_1,\ldots,x_n)$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A. Τότε, η εξίσωση $A \cdot x = \lambda \cdot x$ γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$\begin{aligned}
&(a_1 - \lambda)\cdot x_1 + \beta_1 \cdot x_2 = 0,\\
&\gamma_1 \cdot x_1 + (a_2 - \lambda)\cdot x_2 + \beta_2 \cdot x_3 = 0,\\
&\gamma_2 \cdot x_2 + (a_3 - \lambda)\cdot x_3 + \beta_3 \cdot x_4 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\gamma_{n-2} \cdot x_{n-2} + (a_{n-1} - \lambda)\cdot x_{n-1} + \beta_{n-1} \cdot x_n = 0,\\
&\gamma_{n-1} \cdot x_{n-1} + (a_n - \lambda)\cdot x_n = 0.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $x_1 = 1$ (ή $x_n = 1$), το σύστημα λύνεται αμέσως. Πρέπει ωστόσο να προληφθούν ορισμένες καταστάσεις προκειμένου να μην γίνουν λάθη στρογγύλευσης.

II.4.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ LANCZOS

Η μέθοδος αυτή, αναγωγής τυχαίου πραγματικού πίνακα A διάστασης n, σε όμοιό του, τριδιαγώνιο B, επινοήθηκε το 1950 από τον *Lanczos*.

Δοθέντων δύο τυχαίων διανυσμάτων $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ και $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, θέτουμε:

$$x^{(0)} := 0 \in \mathbb{R}^n, \quad y^{(0)} := 0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$x^{(1)} := x, \qquad y^{(1)} := y,$$

και μετά, για κάθε $k = 1,2,\ldots,$ υπολογίζουμε τα διανύσματα:

$$x^{(k+1)} = A \cdot x^{(k)} - \mathrm{a}_k \cdot x^{(k)} - b_{k-1} \cdot x^{(k-1)}$$

και:

$$y^{(k+1)} = A^T \cdot y^{(k)} - \mathrm{a}_k \cdot y^{(k)} - b_{k-1} \cdot y^{(k-1)},$$

όπου:

$$b_0 = 0$$

και:

$$\mathrm{a}_k = \frac{\langle A \cdot x^{(k)} / y^{(k)} \rangle}{\langle x^{(k)} / y^{(k)} \rangle}, \quad b_k = \frac{\langle A \cdot x^{(k)} / y^{(k-1)} \rangle}{\langle x^{(k-1)} / y^{(k-1)} \rangle} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Θεώρημα II.4.1.1. ***Για κάθε*** $i = 1,2,\ldots$ ***και*** $j = 1,2,\ldots,$ ***εάν*** $i \neq j$***, ισχύει***

$$\langle x^{(i)} / y^{(j)} \rangle = 0.$$

Απόδειξη. Προφανώς, είναι:

$$\langle x^{(0)} / y^{(1)} \rangle = \langle x^{(1)} / y^{(0)} \rangle = 0.$$

Επί πλέον, έχουμε:

$$\langle x^{(2)}/y^{(1)}\rangle = \langle A\cdot x^{(1)} - \mathrm{a}_1\cdot x^{(1)}/y^{(1)}\rangle = \langle A\cdot x^{(1)}/y^{(1)}\rangle - \frac{\langle A\cdot x^{(1)}/y^{(1)}\rangle}{\langle x^{(1)}/y^{(1)}\rangle}\langle x^{(1)}/y^{(1)}\rangle = 0$$

και:

$$\langle x^{(1)}/y^{(2)}\rangle = \langle x^{(1)}/A^T\cdot y^{(1)} - \mathrm{a}_1\cdot y^{(1)}\rangle = \langle x^{(1)}/A^T\cdot y^{(1)}\rangle - \frac{\langle A\cdot x^{(1)}/y^{(1)}\rangle}{\langle x^{(1)}/y^{(1)}\rangle}\langle x^{(1)}/y^{(1)}\rangle = 0$$

Ας υποθέσουμε τώρα πως έχει ήδη αποδειχθεί ότι:

$$\langle x^{(p+1)}/y^{(p)}\rangle = \langle x^{(p)}/y^{(p+1)}\rangle = 0, \quad \text{για} \quad p = 0,1,\ldots,i-1.$$

Τότε:

$$\begin{aligned}\langle x^{(i)}/y^{(i+1)}\rangle &= \langle x^{(i)}/A^T\cdot y^{(i)}\rangle - \mathrm{a}_i\langle x^{(i)}/y^{(i)}\rangle - b_{i-1}\langle x^{(i)}/y^{(i-1)}\rangle \\ &= \langle x^{(i)}/A^T\cdot y^{(i)}\rangle - \frac{\langle A\cdot x^{(i)}/y^{(i)}\rangle}{\langle x^{(i)}/y^{(i)}\rangle}\langle x^{(i)}/y^{(i)}\rangle - 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned}\langle x^{(i+1)}/y^{(i)}\rangle &= \langle A\cdot x^{(i)}/y^{(i)}\rangle - \mathrm{a}_i\langle x^{(i)}/y^{(i)}\rangle - b_{i-1}\langle x^{(i-1)}/y^{(i)}\rangle \\ &= \langle A\cdot x^{(i)}/y^{(i)}\rangle - \frac{\langle A\cdot x^{(i)}/y^{(i)}\rangle}{\langle x^{(i)}/y^{(i)}\rangle}\langle x^{(i)}/y^{(i)}\rangle - 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

και με όμοιο τρόπο:

$$\langle x^{(2)}/y^{(0)}\rangle = \langle x^{(0)}/y^{(2)}\rangle = 0,$$

και

$$\begin{aligned}\langle x^{(1)}/y^{(3)}\rangle &= \langle x^{(1)}/A^T\cdot y^{(2)} - \mathrm{a}_2\cdot y^{(2)} - b_1\cdot y^{(1)}\rangle \\ &= \langle x^{(1)}/A^T\cdot y^{(2)}\rangle - \mathrm{a}_2\langle x^{(1)}/y^{(2)}\rangle - \frac{\langle A.x^{(2)}/y^{(1)}\rangle}{\langle x^{(1)}/y^{(1)}\rangle}\langle x^{(1)}/y^{(1)}\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle A \cdot x^{(1)} / y^{(2)} \rangle - \langle A \cdot x^{(2)} / y^{(1)} \rangle$$

$$= \langle A \cdot x^{(1)} / A^T \cdot y^{(1)} - \mathrm{a}_1 \cdot y^{(1)} \rangle - \langle A^2 \cdot x^{(1)} - \mathrm{a}_1 \cdot A \cdot x^{(1)} / y^{(1)} \rangle$$

$$= \langle A^2 \cdot x^{(1)} / y^{(1)} \rangle - \mathrm{a}_1 \langle A \cdot x^{(1)} / y^{(1)} \rangle - \langle A^2 \cdot x^{(1)} / y^{(1)} \rangle + \mathrm{a}_1 \langle A \cdot x^{(1)} / y^{(1)} \rangle$$
$$= 0$$

και:

$$\langle x^{(3)} / y^{(1)} \rangle = \langle A \cdot x^{(2)} - \mathrm{a}_2 \cdot x^{(2)} - b_1 \cdot x^{(1)} / y^{(1)} \rangle$$
$$= \langle A \cdot x^{(2)} / y^{(1)} \rangle - \mathrm{a}_2 \langle x^{(2)} / y^{(1)} \rangle - \frac{\langle A \cdot x^{(2)} / y^{(1)} \rangle}{\langle x^{(1)} / y^{(1)} \rangle} \langle x^{(1)} / y^{(1)} \rangle$$
$$= 0 .$$

Ας υποθέσουμε, ακόμη, πως ήδη έχει αποδειχθεί ότι:

$$\langle x^{(p+1)} / y^{(p-1)} \rangle = \langle x^{(p-1)} / y^{(p+1)} \rangle = 0 , \quad \text{για } p = 0,1,\ldots,i-1 .$$

Τότε:

$$\langle x^{(i-1)} / y^{(i+1)} \rangle = \langle x^{(i-1)} / A^T \cdot y^{(i)} \rangle - \mathrm{a}_i \langle x^{(i-1)} / y^{(i)} \rangle - b_{i-1} \langle x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle$$

$$= \langle A \cdot x^{(i-1)} / y^{(i)} \rangle - 0 - \langle A \cdot x^{(i)} / y^{(i-1)} \rangle$$

$$= \langle A \cdot x^{(i-1)} / A^T \cdot y^{(i-1)} - \mathrm{a}_{i-1} \cdot y^{(i-1)} - b_{i-2} \cdot y^{(i-2)} \rangle$$
$$- \langle A^2 \cdot x^{(i-1)} - \mathrm{a}_{i-1} \cdot A \cdot x^{(i-1)} - b_{i-2} \cdot A \cdot x^{(i-2)} / y^{(i-1)} \rangle$$

$$= \langle A \cdot x^{(i-1)} / A^T \cdot y^{(i-1)} \rangle - \mathrm{a}_{i-1} \langle x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle$$
$$- b_{i-2} \langle A \cdot x^{(i-1)} / y^{(i-2)} \rangle - \langle A^2 \cdot x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle$$
$$+ \mathrm{a}_{i-1} < A \cdot x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle + b_{i-2} \langle A \cdot x^{(i-2)} / y^{(i-1)} \rangle$$

$$= b_{i-2} \langle A \cdot x^{(i-2)} / y^{(i-1)} \rangle - b_{i-2} \langle A \cdot x^{(i-1)} / y^{(i-2)} \rangle$$

.....

$$= b_{i-2}\, b_{i-3} \ldots b_0\, (\langle A \cdot x^{(0)} / y^{(1)} \rangle - \langle A \cdot x^{(1)} / y^{(0)} \rangle)$$
$$= 0$$

και:

$$\langle x^{(i+1)} / y^{(i-1)} \rangle = \langle A \cdot x^{(i)} / y^{(i-1)} \rangle - \mathrm{a}_i \langle x^{(i)} / y^{(i-1)} \rangle - b_{i-1} \langle x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle$$

$$= \langle A.x^{(i)} / y^{(i-1)} \rangle - 0 - \frac{\langle A \cdot x^{(i)} / y^{(i-1)} \rangle}{\langle x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle} \langle x^{(i-1)} / y^{(i-1)} \rangle$$

$$= 0.$$

Έτσι $x^{(i+1)} \perp y^{(i-1)} \perp x^{(i)} \perp y^{(i-2)}$, και επομένως:

$$\langle x^{(i+1)} / y^{(i-2)} \rangle = 0 .$$

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι:

$$\langle x^{(i-2)} / y^{(i+1)} \rangle = 0 .$$

Με αυτόν τον τρόπο, βήμα-βήμα, ολοκληρώνεται η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

Πόρισμα ΙΙ.4.1.2. $x^{(n+1)} = y^{(n+1)} = 0$. ■

(Πραγματικά, όπως είναι γνωστό, μέσα σ' ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερα από n το πλήθος διανύσματα ορθογώνια προς ένα δεδομένο διάνυσμα του χώρου.)

Μετά απ' όσα προηγήθηκαν, είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε την ανάπτυξη της μεθόδου Lanczos.

Είναι φανερό ότι οι επαγωγικές σχέσεις:

$$x^{(k+1)} = A \cdot x^{(k)} - \mathrm{a}_k \cdot x^{(k)} - b_{k-1} \cdot x^{(k-1)}$$

$$y^{(k+1)} = A^T \cdot y^{(k)} - \mathrm{a}_k \cdot y^{(k)} - b_{k-1} \cdot y^{(k-1)},$$

μπορούν να γραφούν ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$A \cdot x^{(k)} = b_{k-1} \cdot x^{(k-1)} + \mathrm{a}_k \cdot x^{(k)} + x^{(k+1)}$$

$$A^T \cdot y^{(k)} = b_{k-1} \cdot y^{(k-1)} + \mathrm{a}_k \cdot y^{(k)} + y^{(k+1)}$$

για κάθε $k = 1,2,\ldots$

Εισάγοντας τώρα τους τρεις τετραγωνικούς πίνακες:

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & b_1 & & & & \\ 1 & \mathrm{a}_2 & b_2 & & \mathrm{O} & \\ & 1 & \mathrm{a}_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \mathrm{O} & & 1 & \mathrm{a}_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & 1 & \mathrm{a}_n \end{pmatrix},$$

$$X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$$

και

$$Y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}),$$

βλέπουμε ότι οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται ισοδύναμα ως εξής:

$$A \cdot X = X \cdot B \Leftrightarrow B = X^{-1} \cdot A \cdot X$$

$$Y \cdot A = B^T \cdot Y \Leftrightarrow B^T = Y \cdot A \cdot Y^{-1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι, ενώ επί πλέον ο πίνακας B είναι τριδιαγώνιος. Θέτοντας:

$$P_0(\lambda) = 1 \quad , \quad P_1(\lambda) = \mathrm{a}_1 - \lambda,$$

και κατασκευάζοντας την ακολουθία:

$$P_{k+1}(\lambda) = (\mathrm{a}_{k+1} - \lambda) P_k(\lambda) - b_k P_{k-1}(\lambda), \quad \text{για} \quad k = 1,2,\ldots,n-1,$$

το πολυώνυμο $P_n(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

Από αριθμητικής άποψης, αυτή η μέθοδος είναι αρκετά γρήγορη, όμως η ακρίβειά της είναι αμφισβητήσιμη για πίνακες μεγάλων διαστάσεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διορθογωνιότητα των ακολουθιών

$$(x^{(i)} : i \in \mathbb{N}_0) \text{ και } (y^{(i)} : i \in \mathbb{N}_0)$$

είναι αριθμητικά αβέβαιη, κυρίως όταν οι συνιστώσες των διανυσμάτων $x^{(i)}$ και $y^{(i)}$ είναι αρκετά μικρές.

Μπορούμε να ελαττώσουμε αυτή την ενδεχόμενη απώλεια ακριβείας, διορθώνοντας τα διανύσματα $x^{(i)}$ σε κάθε επανάληψη και θεωρώντας τα ελαφρώς τροποποιημένα από τα αρχικά διανύσματα:

$$\overline{x^{(i)}} = x^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{i,j} \cdot x^{(j)},$$

όπου:

$$\gamma_{i,j} = \frac{\langle x^{(i)} / y^{(j)} \rangle}{\langle x^{(j)} / y^{(j)} \rangle} .$$

Τότε, όπως εύκολα διαπιστώνεται, ισχύει πάλι:

$$\langle \overline{x^{(i)}} / y^{(j)} \rangle = 0 \quad \text{όταν} \quad i \neq j,$$

Όπως έχει ήδη επισημανθεί, έχουμε ιδιαίτερο κίνητρο να οδηγηθούμε σε τριδιαγώνιο πίνακα *B* που να είναι συμμετρικός.

Προς τούτο, ο *Durand* πρότεινε μία παραλλαγή της μεθόδου Lanczos που καταλήγει σε συμμετρικό τριδιαγώνιο πίνακα.

Σύμφωνα μ' αυτήν την παραλλαγή, θέτουμε:

$$x^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^n, \qquad y^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$x^{(1)} = e^{(1)} \in \mathbb{R}^n, \qquad y^{(1)} = e^{(1)} \in \mathbb{R}^n,$$

και:

$$b_k \cdot x^{(k+1)} = A \cdot x^{(k)} - \mathrm{a}_k \cdot x^{(k)} - b_{k-1} \cdot x^{(k-1)}$$

$$b_k \cdot y^{(k+1)} = A^T \cdot y^{(k)} - \mathrm{a}_k \cdot y^{(k)} - b_{k-1} \cdot y^{(k-1)}$$

για κάθε $k = 1,2,...,$ όπου οι αριθμοί a_k και b_k είναι επιλεγμένοι έτσι ώστε να ισχύει:

$$\langle x^{(i)} / y^{(i)} \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ 0 & \text{εάν} \quad i \neq j, \end{cases}$$

δηλαδή έτσι ώστε:

$$\mathrm{a}_k = \langle A \cdot x^{(k)} / y^{(k)} \rangle$$

και:

$$b_k = \langle A \cdot x^{(k)} / y^{(k)} \rangle = \langle A \cdot x^{(k+1)} / y^{(k)} \rangle.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα a_k και b_k συσχετίζονται μεταξύ τους όπως ακολούθως:

$$b_k = (\langle A \cdot x^{(k)} / A \cdot y^{(k)} \rangle - \mathrm{a}_k^{\,2} - b_k^{\,2})^{1/2},$$

με:

$$b_0 = 0.$$

Τότε, θεωρώντας τους πίνακες:

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & \mathrm{a}_2 & b_2 & & \mathrm{O} & \\ & b_2 & \mathrm{a}_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & b_{n-2} & \mathrm{a}_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & \mathrm{a}_n \end{pmatrix}$$

και:

$$X = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}),$$

αποδεικνύεται αμέσως ότι:

$$B = X^{-1} \cdot A \cdot X.$$

Αυτή η μέθοδος παρουσιάζει την δυσκολία ότι ο υπολογισμός των αριθμών b_k προϋποθέτει την χρησιμοποίηση σύνθετων και πολύπλοκων αριθμητικών πράξεων.

Επί πλέον, εάν ένα από τα b_κ είναι ίσο με μηδέν, τότε ο υπολογισμός των $x^{(k+1)}$ και $y^{(k+1)}$ είναι αδύνατος.

Εν τούτοις, σ' αυτήν την τελευταία περίπτωση, η ορίζουσα $\det(B - \lambda \cdot \mathrm{I})$ διασπάται σε γινόμενο δύο άλλων οριζουσών.

ΙΙ.4.2.ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ GIVENS ΚΑΙ HOUSEHOLDER

Όπως επισημάνθηκε στις *Παρατηρήσεις ΙΙ.3.1.1.(iii)* και *ΙΙ.3.2.1. (ii)*, όταν ο πίνακας A είναι συμμετρικός, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε *τις μεθόδους Givens* και *Householder* προκειμένου να πετύχουμε την αναγωγή του πίνακα *A* σε τριδιαγώνια μορφή.

Σε μία τέτοια περίπτωση, η συμμετρία των πινάκων, που προκύπτουν κατά τα διάφορα στάδια της αναγωγής, είναι ο λόγος που περιορίζει σημαντικά τον απαιτούμενο συνολικό αριθμό πολλαπλασιασμών που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς.

Έτσι, όταν ο A είναι συμμετρικός $n \times n$ πίνακας, η αναγωγή του σε τριδιαγώνια, συμμετρική και όμοια μορφή απαιτεί:

$\frac{4}{3} n^3$ περίπου πολλαπλασιασμούς, εάν εφαρμοστεί η μέθοδος Givens,

και

$\frac{2}{3} n^3$ πολλαπλασιασμούς, εάν εφαρμοστεί η μέθοδος Householder.

Γι' αυτό, στην πράξη χρησιμοποιείται πάντοτε η μέθοδος Householder. Παρ' όλα αυτά, η έκθεση της μεθόδου Givens δεν είναι άχρηστη, γιατί οι μέθοδοι Jacobi και Greenstadt για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών πίνακα είναι παραλλαγές της μεθόδου Givens. Η μελέτη αυτών των μεθόδων θα αποτελέσει το αντικείμενο του επόμενου *Εδαφίου*.

ΙΙ.5. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ

Πολλές μέθοδοι υπολογισμού ιδιοτιμών ενός τετραγωνικού πίνακα A στηρίζονται στην ίδια βασική ιδέα: στην διάσπαση του πίνακα A σε γινόμενο δύο άλλων τετραγωνικών πινάκων B και C, δηλαδή στην έκφραση $A = B \cdot C$.

Εάν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε $C = B^{-1} \cdot A$ και $C \cdot B = B^{-1} \cdot A \cdot B$. Αυτό σημαίνει ότι οι πίνακες A και $C \cdot B$ είναι όμοιοι.

Εάν διασπάσουμε τον πίνακα $C \cdot B$ σε γινόμενο δύο νέων πινάκων, και συνεχίσουμε περαιτέρω τις διασπάσεις, θα οδηγηθούμε στις ακόλουθες εκφράσεις:

$$A_0 = A = B_0 \cdot C_0$$

$$A_1 = C_0 \cdot B_0 = B_1 \cdot C_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_k = C_{k-1} \cdot B_{k-1} = B_k \cdot C_k$$

$$A_{k+1} = C_k \cdot B_k = B_{k+1} \cdot C_{k+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Όλοι οι πίνακες A_k είναι όμοιοι με τον πίνακα A. Επομένως, για να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές του A, αρκεί οι διασπάσεις να έχουν επιλεγεί έτσι ώστε:

1°). ***Η ακολουθία των πινάκων A_k να συγκλίνει προς έναν τετραγωνικό πίνακα, που θα συμβολίζεται με A_∞, καθώς $k \to \infty$.*** (Αυτό σημαίνει πως εάν $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \le i,j \le n}$ και $A_\infty = (a_{i,j}^{(\infty)})_{1 \le i,j \le \infty}$, τότε:

$$\lim_{k \to \infty} a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(\infty)}$$

για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ και για κάθε $j = 1,2,\dots,n$.)

2°). ***Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών του πίνακα A_∞ να είναι απλός και εύκολος.***

Ας εξετάσουμε πρώτα κάποιες γενικές ιδιότητες των μεθόδων διάσπασης. Θέτουμε:

$$P_k := B_0 \cdot B_1 ... B_k \qquad \text{και} \qquad Q_k := C_k ... C_1 \cdot C_0 .$$

Τότε, είναι σαφές ότι:

$$A_{k+1} = B_k^{-1} \cdot A_k \cdot B_k = ... = P_k^{-1} \cdot A \cdot P_k ,$$

και κατά συνέπεια η σύγκλιση των πινάκων A_k εξασφαλίζεται από την σύγκλιση των πινάκων P_k.

Θέτοντας:

$$P_\infty := \lim_{k\to\infty} P_k ,$$

και, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του P_k, διαπιστώνουμε ότι:

$$\lim_{k\to\infty} B_k = \lim_{k\to\infty} P_{k-1}^{-1} \cdot P_k = P_\infty^{-1} \cdot P_\infty = \mathrm{I} ,$$

κι επειδή $A_k = B_k . C_k$ θα είναι:

$$A_\infty = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k \cdot \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} C_k .$$

Άρα, οι διασπάσεις αρκεί να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε οι ιδιοτιμές των πινάκων C_k να υπολογίζονται εύκολα. Το τελευταίο συμβαίνει όταν οι πίνακες C_k είναι άνω τριγωνικοί, οπότε οι ιδιοτιμές τους είναι ακριβώς τα στοιχεία των διαγωνίων τους.

Μέχρι τώρα, ακριβώς δύο διασπάσεις $A = B \cdot C$, με τον C άνω τριγωνικό πίνακα, είναι γνωστές:

- *Η **διάσπαση** LU*, που οδηγεί στην μέθοδο Gauss για την επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. (Ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός, με όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιάς του ίσα με 1, και ο πίνακας U είναι άνω τριγωνικός).
- *Η **διάσπαση** QU **του Householder***. (Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος, ενώ ο πίνακας U είναι άνω τριγωνικός).

Οι μέθοδοι που θα αναπτύξουμε στην συνέχεια στηρίζονται σ' αυτές τις δύο διασπάσεις.

Η πρώτη διάσπαση οδηγεί στον ***αλγόριθμο*** LR, που οφείλεται στον *Rutishauser* (1955).

Η δεύτερη διάσπαση οδηγεί στον ***αλγόριθμο*** QR, που επινοήθηκε από τους *Francis* και *Kublanovskaya* το 1961, και στην ***μέθοδο Jacobi*** (1846) που αφορά στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Προτού προχωρήσουμε στην ανάπτυξη αυτών των μεθόδων και αλγορίθμων, κρίνουμε ότι είναι χρήσιμο να προβούμε στην παράθεση κάποιων αξιοσημείωτων παρατηρήσεων.

Καταρχάς, όπως ήδη αναφέρθηκε, ισχύει ότι $A_{k+1} = B^{-1} \cdot A_k \cdot B_k$. Η γνώση των πινάκων C_k δεν είναι λοιπόν απαραίτητη για την λειτουργία του αλγορίθμου. Άλλωστε θα δούμε ότι το σκεπτικό της μεθόδου Jacobi στηρίζεται σ' αυτήν ακριβώς την παρατήρηση και την συμμετρία του πίνακα A.

Ακόμη, ας σημειωθεί ότι:

$$\begin{aligned} P_k \cdot Q_k &= P_{k-1} \cdot B_k \cdot C_k \cdot Q_{k-1} \\ &= P_{k-1} \cdot A_k \cdot Q_{k-1} \\ &= P_{k-1} \cdot (P_{k-1}^{-1} \cdot A \cdot P_{k-1}) \cdot Q_{k-1} \\ &= A \cdot P_{k-1} \cdot Q_{k-1} \\ &= A^2 \cdot P_{k-2} \cdot Q_{k-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= A^{k+1}, \end{aligned}$$

δηλαδή το γινόμενο $P_k \cdot Q_k$ είναι μία διάσπαση του πίνακα A^{k+1}.

Η τελευταία παρατήρηση που θα κάνουμε αναφέρεται στα ιδιοδιανύσματα: ***Εάν*** $z^{(i)}$ ***είναι το ιδιοδιάνυσμα του*** A***, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή*** λ_i***, τότε το διάνυσμα:***

$$w^{(i)} = P^{-1} \cdot z^{(i)},$$

όπου P είναι τυχαίος τετραγωνικός, αντιστρέψιμος πίνακας που έχει τις ίδιες διαστάσεις με τον A, είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $P^{-1} \cdot A \cdot P$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} A \cdot z^{(i)} = \lambda_i \cdot z^{(i)} &\Leftrightarrow A \cdot P \cdot w^{(i)} = \lambda_i \cdot P \cdot w^{(i)} \\ &\Leftrightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot w^{(i)} = \lambda_i \cdot P^{-1} \cdot P \cdot w^{(i)} \\ &\Leftrightarrow (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot w^{(i)} = \lambda_i \cdot w^{(i)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό.

Στο θέμα μας, η παρατήρηση αυτή εξυπηρετεί την πρόσθεσή μας να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Συγκεκριμένα, από την στιγμή που έχουν υπολογισθεί οι ιδιοτιμές του A_∞, καθώς και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του $w^{(i)}$, μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του A θέτοντας:

$$z^{(i)} := P_\infty \cdot w^{(i)}.$$

II.5.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI

Η ***μέθοδος Jacobi*** εφαρμόζεται σε πραγματικούς, συμμετρικούς πίνακες. Έστω A ένας τέτοιος πίνακας.

Όπως επισημάνθηκε στις προηγούμενες παρατηρήσεις, μπορούμε να θέσουμε σε λειτουργία μία μέθοδο διάσπασης χρησιμοποιώντας μόνον τους πίνακες B_k και τους αντίστροφούς τους. Σαν πίνακες B_k επιλέγουμε τους ορθογώνιους πίνακες της μορφής:

$$B_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \cdots & \cdots & \sin\theta & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & \sin\theta & \cdots & \cdots & \cdots & \cos\theta & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & \uparrow & & & & & \uparrow & & \\ & & & p & & & & & q & & \end{array} \end{array}$$

που έχουν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα με μηδέν.

Μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι

$$B_k^{-1} = B_k^T$$

και ότι όλοι οι πίνακες A_k που προκύπτουν είναι συμμετρικοί.

Επίσης, ότι κατά το πέρασμα από τον πίνακα A_k στον A_{k+1}, τα μόνα στοιχεία που μεταβάλλονται είναι τα στοιχεία των γραμμών και των στηλών *p* και *q*.

Ας συμβολίσουμε με $a_{i,j}^{(k)}$ τα στοιχεία του A_k.

Τότε:

$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)}$, εάν $i \neq p$ και $j \neq q$

$a_{i,p}^{(k+1)} = a_{i,p}^{(k)} \cos\theta + a_{i,p}^{(k)} \sin\theta$, εάν $i \neq p,q$

$a_{i,q}^{(k+1)} = -a_{i,p}^{(k)} \sin\theta + a_{i,q}^{(k)} \cos\theta$, εάν $i \neq p,q$

$a_{p,q}^{(k+1)} = a_{p,p}^{(k)} \cos^2\theta + 2a_{p,q}^{(k)} \sin\theta\cos\theta + a_{q,q}^{(k)} \sin^2\theta$

$a_{q,q}^{(k+1)} = a_{p,p}^{(k)} \sin^2\theta - 2a_{p,q}^{(k)} \sin\theta\cos\theta + a_{q,q}^{(k)} \cos^2\theta$

$a_{p,j}^{(k+1)} = a_{p,j}^{(k)} \cos\theta + a_{q,j}^{(k)} \sin\theta$, εάν $j \neq p,q$

$a_{q,j}^{(k+1)} = -a_{q,j}^{(k)}.\sin\theta + a_{q,j}^{(k)}.\cos\theta$, εάν $j \neq p,q$

$a_{p,q}^{(k+1)} = (a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)})\sin\theta\cos\theta + a_{p,q}^{(k)}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a_{q,p}^{(k+1)}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι εάν ένας πίνακας A_k είναι συμμετρικός τότε και ο πίνακας A_{k+1} είναι συμμετρικός.

Η γωνία ϑ επιλέγεται με τέτοιον τρόπο ώστε τα στοιχεία $a_{p,q}^{(k+1)}$ και $a_{q,p}^{(k+1)}$ να μηδενίζονται, δηλαδή έτσι ώστε:

$$(a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)})\sin\theta\cos\theta = a_{p.q}^{(k)}(\sin^2\theta - \cos^2\theta).$$

Διαιρώντας μάλιστα και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με $-\cos^2\theta$, βρίσκουμε ότι η γωνία ϑ πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$(a_{p,p}^{(k)} - a_{q,q}^{(k)})\,\mathrm{tg}\,\theta = a_{p,q}^{(k)}(1 - \mathrm{tg}^2\theta),$$

ή ισοδύναμα (επειδή $\mathrm{tg}2\theta\,(1 - \mathrm{tg}^2\theta) = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$):

$$\mathrm{tg}2\theta = \frac{2\, a_{p,q}^{(k)}}{a_{p,p}^{(k)} - a_{q,q}^{(k)}} = r\,,$$

ή ακόμη:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right)^{1/2}.$$

Εάν $a_{p,p}^{(k)} = a_{q,q}^{(k)}$, τότε παίρνουμε:

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Οι αριθμοί p και q μεταβάλλονται σε κάθε επανάληψη. Έτσι ενώ τα στοιχεία $a_{p,q}^{(k-1)}$ και $a_{q,p}^{(k-1)}$ είχαν μηδενισθεί κατά την $(k-1)-$επανάληψη, τα στοιχεία $a_{p,q}^{(k)}$ και $a_{q,p}^{(k)}$ δεν θα έχουν απαραίτητα μηδενισθεί μετά από την *k*- επανάληψη.

Εν τούτοις, επαναλαμβάνοντας την μέθοδο για όλα τα ζεύγη (p,q) με $p \neq q$, καταφέρνουμε λίγο-λίγο να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία που βρίσκονται έξω από την διαγώνιο.

Επομένως, οι πίνακες A_k θα συγκλίνουν προς ένα πίνακα διαγώνιο, όμοιο με τον A.

Οι ιδιοτιμές θα βρίσκονται λοιπόν επί της διαγωνίου αυτού του πίνακα. Αυτό ακριβώς θα δείξουμε τώρα.

Θέτουμε:

$$N(A_k) := \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} (a_{i,j}^{(k)})^2\,.$$

Όταν περνάμε από τον πίνακα A_k στον A_{k+1}, τα μόνα στοιχεία που μεταβάλλονται είναι τα στοιχεία των γραμμών και στηλών p και q.

Επειδή οι πίνακες είναι συμμετρικοί, αρκεί να ενδιαφερθούμε αποκλειστικά για τις στήλες (ή τις γραμμές) p και q. Σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις, διαπιστώνουμε ότι:

$$\sum_{\substack{i=1\\(i\neq p,q)}}^{n}((a_{i,p}^{(k+1)})^2+(a_{i,p}^{(k+1)})^2)$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\(i\neq p,q)}}^{n}(a_{i,p}^{(k+1)})^2\cos^2\theta+2a_{i,p}^{(k)}a_{i,p}^{(k)}\sin\theta\cos\theta+(a_{i,p}^{(k+1)})^2\sin^2\theta$$

$$+(a_{i,p}^{(k+1)})^2\sin^2\theta-2a_{i,p}^{(k)}a_{i,p}^{(k)}\sin\theta\cos\theta+(a_{i,p}^{(k+1)})^2\cos^2\theta$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\(i\neq p,q)}}^{n}((a_{i,p}^{(k+1)})^2+(a_{i,p}^{(k+1)})^2).$$

Συνεπώς:

$$N(A_{k+1})-2(a_{p,q}^{(k+1)})^2=N(A_k)-2(a_{p,q}^{(k)})^2$$

κι επειδή η γωνία ϑ επιλέγεται έτσι ώστε $a_{p,q}^{(k+1)}=0$, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο:

Θεώρημα ΙΙ.5.1.1. $N(A_{k+1})=N(A_k)-2(a_{p,q}^{(k)})^2$. ■

Έπεται αμέσως ότι

$$0\leq N(A_{k+1})\leq N(A_k),$$

με αποτέλεσμα η ακολουθία:

$$(N(A_0),N(A_1),N(A_2),\ldots,N(A_k),N(A_{k+1}),\ldots)$$

να είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα και συγκλίνουσα.

Ας αναζητήσουμε το όριό της. Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, σε κάθε επανάληψη η επιλογή των p και q είναι ελεύθερη. Στην πράξη συναντώνται δύο τρόποι της εκάστοτε επιλογής των p και q:

- ή επιλέγουμε τις τιμές εκείνες των p και q που αντιστοιχούν στο εξωδιαγώνιο στοιχείο με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. (Πρόκειται για την επιλογή που έγινε από τον Jacobi).
- ή επιλέγουμε τις τιμές των p, q με κυκλική διάταξη $(1,2),(1,3),\dots,(1,n),(2,3),\dots,(2n),\dots,(n-1,n)$.

Θα αναζητήσουμε το όριο της ακολουθίας $(N(A_k):k=0,1,2,\dots)$ μόνον στην πρώτη περίπτωση. (Η αντίστοιχη αναζήτηση στην δεύτερη περίπτωση είναι πολύπλοκη.) Έχουμε:

$$\left|a_{p,q}^{(k)}\right| = \max_{i\neq j}\left|a_{i,j}^{(k)}\right|,$$

κι επομένως:

$$\underbrace{N(A_k) \le \left(n^b : \textit{το πλήθος εξωδιαγώνια στοιχεία} \right) \left(a_{p,q}^{(k)} \right)^2}_{=n^2-n}$$

δηλαδή $N(A_k) \le (n^2-n)\,(a_{p,q}^{(k)})^2$. Χρησιμοποιώντας το *Θεώρημα ΙΙ.5.1.1*, αποδεικνύουμε λοιπόν ότι:

$$N(A_{k+1}) \le N(A_k) - \frac{2}{n^2-n}N(A_k) = \left(1-\frac{2}{n^2-n}\right)N(A_k),$$

κι επειδή:

$$0 \le 1-\frac{2}{n^2-n} =: \mathrm{a} < 1,$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $N(A_{k+1}) \le \mathrm{a}^{k+1}\ N(A)$, που συνεπάγεται ότι:

$$\lim_{k\to\infty} N(A_k) = 0.$$

Άρα, ο πίνακας A_∞ είναι διαγώνιος και όμοιος με τον A. Σύμφωνα με την τρίτη κατά σειρά Παρατήρηση που παραθέσαμε στην σελίδα 108 της εισαγωγικής μας αναφοράς σχετικά με τις μεθόδους διάσπασης, τα ιδιοδιανύσματα του A είναι οι στήλες του πίνακα:

$$P_\infty = \lim_{k\to\infty}(B_0 \cdot B_1 \cdot \ldots \cdot B_k),$$

γιατί τα ιδιοδιανύσματα του A_∞ είναι τα διανύσματα $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$ της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$.

Στην πράξη, σταματάμε τις επαναλήψεις όταν ο αριθμός $N(A_k)$ γίνει μικρότερος από κάποιο $\varepsilon > 0$, σταθερό και προκαθορισμένο. Όμως, αυτή η στρατηγική απέχει πολύ από το να γίνει βέλτιστη.

Πράγματι, έχουν παρουσιαστεί περιπτώσεις όπου, ενώ ο πίνακας A_k δεν έχει ακόμα μετατραπεί σε διαγώνιο (υπό την έννοια ότι $N(A_k) > \varepsilon$), τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι ίσα με τις ιδιοτιμές του A.

Το 1971, ο ***Chatelin*** έδωσε ένα ικανοποιητικό κριτήριο διακοπής των επαναλήψεων διαφορετικό από το προηγούμενο. Αυτό το κριτήριο έχει αποδειχθεί εξαιρετικά αποτελεσματικό. Σε ορισμένες περιπτώσεις μάλιστα επιτρέπει την μείωση από *500* σε *15* του αριθμού των επαναλήψεων που απαιτούνται για την επίτευξη μίας ορισμένης ακρίβειας.

Το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε ο Chatelin είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα ΙΙ.5.1.2. ***Θέτουμε:***

$$A_k = D_k + E_k,$$

όπου ο πίνακας D_k έχει την ίδια διαγώνια με τον A_k και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν, και:

$$d_i^{(k)} = \min_{1\le j\le n(j\ne i)} | a_{i,i}^{(k)} - a_{j,j}^{(k)} |,$$

$$s_i^{(k)} = \frac{2\,\|E_k\|}{d_i^{(k)}},$$

$$t_i^{(k)} = \frac{2\,\|E_k . e^{(i)}\|}{d_i^{(k)}}.$$

Εάν ο πίνακας A έχει μόνον απλές ιδιοτιμές (δηλαδή όχι πολλαπλές) , τότε, για κάθε i τέτοιο ώστε $s_i^{(k)} < 1$, ισχύει:

$$| \lambda_i - a_{i,i}^{(k)} | \le f(r_i^{(k)}) \|E_k \cdot e^{(i)}\| \quad \text{και} \quad \mathrm{tg}\phi_i^{(k)} \le f(r_i^{(k)}),$$

όπου:

$$f(r) = \frac{1}{r}(\sqrt{1+r^2} - 1)\ ,\ r_i^{(k)} = \frac{2\,t_i^{(k)}}{2 - s_i^{(k)} + (t_i^{(k)})^2}$$

και $\phi_i^{(k)}$ είναι η γωνία που σχηματίζεται από το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και από το διάνυσμα που λαμβάνεται από την $i-$στήλη του πίνακα P_k. ■

Παρατήρηση II.5.1.3. Στην εκφώνηση του προηγούμενου *Θεωρήματος*, και πιο συγκεκριμένα στον ορισμό του αριθμού $s_i^{(k)}$, χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο $\|E_k\|$ που αναπαριστά την νόρμα του πίνακα E_k. Για τον ορισμό της νόρμας πίνακα, καθώς επίσης και για τις ιδιότητες της, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο *Εδάφιο ΙΙΙ.2*. ■

II.5.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ GREENSTADT

Αυτή η μέθοδος παρουσιάστηκε το 1955 από τον ***Greenstadt*** και συνιστά μία γενίκευση της μεθόδου Jacobi στην περίπτωση όπου ο πίνακας A δεν είναι συμμετρικός.

Στην μέθοδο Jacobi, η γωνία ϑ στην έκφραση των πινάκων B_k, επιλεγόταν σε κάθε επανάληψη έτσι ώστε να ήταν $a_{p,q}^{(k+1)} = 0$. Μάλιστα, λόγω της συμμετρίας όλων των πινάκων της μεθόδου, είχαμε επίσης $a_{q,p}^{(k+1)} = 0$.

Εάν ο πίνακας A δεν είναι συμμετρικός, τότε επιδιώκουμε να θέσουμε τις προϋποθέσεις που θα μας εξασφαλίσουν τον μηδενισμό μίας τουλάχιστον από τις δύο ποσότητες $a_{p,q}^{(k+1)}$ και $a_{q,p}^{(k+1)}$. Αυτή είναι η κεντρική ιδέα της μεθόδου Greenstadt κα η διαδοχική εφαρμογή της καταλήγει σε έναν τριγωνικό πίνακα A_∞.

Προς τούτο θεωρούμε τους ορθογώνιους πίνακες:

$$B_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \alpha & \cdots & \cdots & \cdots & c & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & c & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\ & & & p & & & & q & & & \end{array} \end{array}$$

που έχουν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα με 0 και είναι τέτοιοι ώστε:

$$\alpha^2 + c^2 = 1, \quad \text{με } \alpha \neq 0 .$$

Τότε:

$$a_{p,j}^{(k+1)} = \alpha\, a_{p,j}^{(k)} + c\, a_{q,j}^{(k)}, \quad j \neq p,q ,$$

$$a_{q,j}^{(k+1)} = -c\, a_{p,j}^{(k)} + \alpha\, a_{q,j}^{(k)}, \quad j \neq p,q,$$

$$a_{i,p}^{(k)} = \alpha\, a_{i,p}^{(k)} + c\, a_{i,q}^{(k)}, \quad i \neq p,q ,$$

$$a_{i,q}^{(k+1)} = -c\, a_{i,p}^{(k)} + \alpha\, a_{i,q}^{(k)}, \quad i \neq p,q ,$$

$$a_{q,p}^{(k+1)} = \alpha^2\, a_{p,q}^{(k)} + (a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)})\alpha\, c - a_{p,q}^{(k)}\, c^2 ,$$

$$a_{q,p}^{(k+1)} = \alpha^2\, a_{p,q}^{(k)} + (a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)})\alpha\, c - a_{q,p}^{(k)}\, c^2 ,$$

$$a_{p,p}^{(k+1)} = \alpha^2\, a_{p,p}^{(k)} + (a_{p,q}^{(k)} - a_{q,p}^{(k)})\alpha\, c + a_{q,q}^{(k)}\, c^2 ,$$

$$a_{q,q}^{(k+1)} = \alpha^2 a_{q,q}^{(k)} - (\mathrm{a}_{p,q}^{(k)} - a_{q,p}^{(k)})\alpha\, c + a_{p,p}^{(k)}\, c^2 .$$

Πρόθεσή μας είναι η επιλογή των a και c έτσι ώστε $a_{q,p}^{(k+1)} = 0$, δηλαδή έτσι ώστε να ισχύει:

$$\alpha^2\, a_{q,p}^{(k)} + (a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)})\alpha\, c - a_{q,p}^{(k)}\, c^2 = 0$$

και:

$$\alpha^2 + c^2 = 1 .$$

Προκειμένου να λύσουμε αυτό το σύστημα των δύο μη γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, θέτουμε:

$$\chi := \frac{c}{\alpha} \text{ και } 2\Delta_{q,p} := a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)},$$

οπότε η πρώτη από τις δύο εξισώσεις του συστήματος γράφεται:

$$a_{p,q}^{(k)}\ \chi - 2\,\Delta_{q,p}\ \chi - a_{q,p}^{(k)} = 0$$

$$\chi = \frac{\Delta_{q,p} \pm (\Delta_{q,p}^2 + a_{p,q}^{(k)}\ a_{q,p}^{(k)})^{1/2}}{a_{p,q}^{(k)}},$$

υπό την προϋπόθεση ότι $a_{p,q}^{(k)} \neq 0$, ενώ η δεύτερη από τις εξισώσεις του συστήματος γράφεται υπό την ισοδύναμη μορφή δύο εξισώσεων:

$$\alpha = (1+\chi^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad c = (1+\chi^2)^{-\frac{1}{2}}\ \chi\,.$$

Αυτήν την φορά θέτουμε:

$$N(A_k) := \sum_{\substack{i=1 \\ (i>j)}}^{n} (\mathrm{a}_{i,j}^{(k)})^2.$$

Αντίθετα με ότι συμβαίνει στην μέθοδο Jacobi , μπορεί να συμβεί:

$$N(A_{k+1}) > N(A_k),$$

με αποτέλεσμα η σύγκλιση της μεθόδου Greenstadt να μην είναι εξασφαλισμένη. Όταν όμως αυτή η μέθοδος συγκλίνει, τότε η σύγκλιση είναι πολύ γρήγορη.

II.5.3. Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ LR

Αυτός ο αλγόριθμος, που παρουσιάστηκε το 1955 από τον ***Rutishauser***, εφαρμόζεται σε όλους τους τύπους πινάκων και βασίζεται στην μέθοδο Gauss για την επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, δηλαδή για πίνακες B_k επιλέγουμε κάτω τριγωνικούς πίνακες που έχουν παντού πάνω στη διαγώνιό τους το στοιχείο 1 (αυτοί οι πίνακες συμβολίζονται με L_k στην συνηθισμένη ορολογία), ενώ για πίνακες C_k επιλέγουμε άνω τριγωνικούς πίνακες (αυτοί οι πίνακες συμβολίζονται συνήθως με R_k).

Τα στοιχεία $r_{i,j}^{(k)}$ και $l_{i,j}^{(k)}$ των πινάκων R_k και L_k, αντίστοιχα, λαμβάνονται από τις σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{ll} r_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k)} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{i,p}^{(k)}\, r_{p,j}^{(k)} & i = 1,2,\ldots,j \\ l_{i,j}^{(k)} = \dfrac{1}{r_{j,j}^{(k)}}\left(a_{i,j}^{k} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{i,p}^{(k)}\, r_{p,j}^{(k)}\right) & i = j+1,\ldots,n \end{array}\right\} \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Εάν το όριο:

$$A_\infty = \lim_{k\to\infty} A_k$$

υπάρχει, τότε το όριο αυτό είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Πράγματι, όπως είδαμε και πιο πάνω, ισχύει ότι:

$$A_\infty = \lim_{k\to\infty} R_k\,,$$

και οι ιδιοτιμές του πίνακα A θα βρίσκονται επί της διαγωνίου του A_∞ .

Ας δούμε τώρα τις συνθήκες εκείνες που εγγυώνται την σύγκλιση του αλγορίθμου LR.

Θεώρημα ΙΙ.5.3.1. ***Εάν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος*** **(δηλαδή όμοιος μ' έναν διαγώνιο πίνακα)**, ***εάν οι ιδιοτιμές του A είναι τέτοιες ώστε***

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$$

και εάν όλες οι κύριες ορίζουσες του πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων του A καθώς και του αντιστρόφου του είναι διάφορες του μηδενός, τότε ο αλγόριθμος LR συγκλίνει, και ο πίνακας A_∞ είναι της μορφής:

$$A_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & \lambda_n \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Δεν θα δώσουμε απόδειξη αυτού του *Θεωρήματος*. Θα παρουσιάσουμε μόνον την βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται η απόδειξη. Ο πίνακας A γράφεται σαν $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$, όπου D είναι ο διαγώνιος πίνακας που συγκεντρώνει πάνω στην διαγώνιό του όλες τις ιδιοτιμές του A και X είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του A. Τότε $A^{(k)} = X \cdot D^k \cdot X^{-1} = P_k \cdot Q_k$ και, μετά, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι :

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| = 0, \qquad i = 2,3,\ldots,n.$$

Θεώρημα II.5.3.2. ***Εάν ο πίνακας είναι ερμιτιανός και εάν*** $X^T \cdot A \cdot X > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, ***τότε ο αλγόριθμος*** LR ***συγκλίνει.*** ■

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και οι ιδιοτιμές του A δεν βρίσκονται τοποθετημένες ως προς την κατ' απόλυτη τιμή φθίνουσα διάταξη επί της διαγωνίου του A_∞, εν τούτοις υπάρχει σύγκλιση του αλγορίθμου (ακόμα και στην περίπτωση πολλαπλών ιδιοτιμών). Το ισχυρό αυτό αποτέλεσμα οφείλεται στην υπόθεση $X^T \cdot A \cdot X > 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Έτσι, δίνοντας τον *Ορισμό*:

Ορισμός II.5.3.3. ***Ένας πίνακας*** A ***λέγεται θετικά ορισμένος, εάν:***

$$X^T \cdot A \cdot X > 0, \quad \text{για κάθε} \quad \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

έχουμε αμέσως το εξής :

Πόρισμα II.5.3.4. ***Εάν ο πίνακας*** A ***είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, τότε ο αλγόριθμος*** LR ***συγκλίνει.*** ■

Ο αλγόριθμος LR παρουσιάζει το ελάττωμα έχει μία πάρα πολύ αργή σύγκλιση, γιατί η ταχύτητα της σύγκλισής του εξαρτάται από τον λόγο $|\lambda_2/\lambda_1|$.

Για να αποσοβήσει τις συνέπειες της αργής σύγκλισής, ο Rutishauser πρότεινε έναν τρόπο επιτάχυνσης των διαδικασιών.

Δεν θα περιγράψουμε αυτόν τον τρόπο παρά μόνον στην περίπτωση που ο πίνακας *A* έχει όλες τις ιδιοτιμές του πραγματικές και επαληθεύει τις προϋποθέσεις του *Θεωρήματος II.5.3.1*.

Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι, μετά από *k* επαναλήψεις του αλγορίθμου LR, ο πίνακας A_k, που προέκυψε, έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του τακτοποιημένα κατά την φθίνουσα τάξη των απολύτων τιμών τους καθώς και ότι όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την διαγώνιο είναι μικρά.

Οι επαναλήψεις που θα ακολουθήσουν δεν θα πραγματοποιούνται με την εφαρμογή του αλγορίθμου LR, αλλά με την βοήθεια μετασχηματισμών του *Τύπου* :

$$A_{k+1} = L_k^{-1} \cdot A_k \cdot L_k ,$$

όπου L_k είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας που έχει γνωστό αντίστροφο L_k^{-1}. Έτσι, εάν πάρουμε:

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ x_2 & 1 & & \mathrm{O} & \\ x_3 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_n & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

τότε:

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -x_2 & 1 & & \mathrm{O} & \\ -x_3 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

και εφόσον επιλέξουμε κατάλληλα του αριθμούς x_i μπορούμε να καταστήσουμε σχεδόν 0 όλα τα υποδιαγώνια στοιχεία της πρώτης στήλης του A_{k+1}, επιχειρώντας να τα μικρύνουμε πολύ.

Έτσι, από την ισότητα $A_{k+1} = L_k^{-1} \cdot A_k \cdot L_k$, παίρνουμε :

$$a_{j,1}^{(k+1)} = a_{j,1}^{(k)} - a_{1,1}^{(k)} x_1 + \sum_{p=2}^{n} a_{j,p}^{(k)} x_p - x_j \sum_{p=2}^{n} a_{1,p}^{(k)} x_p, \qquad j = 2,\ldots,n.$$

Μηδενίζοντας τους τετραγωνικούς όρους ως προς τα x_i και τα υποδιαγώνια στοιχεία των άλλων στηλών του A_k $(1 < j < i \le n)$, πετυχαίνουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\sum_{p=j}^{n} (a_{j,p}^{(k)} - \delta_{j,p}\, a_{1,1}^{(k)})\; x_p = -a_{j,1}^{(k)}, \quad j = 2,\ldots,n.$$

όπου $\delta_{j,p}$ είναι το *σύμβολο Krönecker* :

$$\delta_{j,p} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } j = p \\ 0 & \text{εάν } j \neq p. \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων γράφεται ισοδύναμα και ως εξής :

$$\begin{pmatrix} a_{2,2}^{(k)} - a_{1,1}^{(k)} & a_{2,3}^{(k)} & \cdots & a_{2,n}^{(k)} \\ & a_{3,3}^{(k)} - a_{1,1}^{(k)} & a_{3,4}^{(k)} & \vdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & a_{n-1,n-1}^{(k)} - a_{1,1}^{(k)} & a_{n-1,n}^{(k)} \\ & \mathrm{O} & & a_{n,n}^{(k)} - a_{1,1}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{2,1}^{(k)} \\ -a_{3,1}^{(k)} \\ \vdots \\ -a_{n-1,1}^{(k)} \\ -a_{n-1,n}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Εάν λύσουμε αυτό το σύστημα και αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$A_{k+1} = L_k^{-1} \cdot A_k \cdot L_k ,$$

τα υποδιαγώνια στοιχεία της πρώτης στήλης του A_{k+1} θα είναι πολύ πιο μικρά από τα αντίστοιχα στοιχεία του A_k .

Το επόμενο στάδιο έγκειται στην απόπειρα μηδενισμού όλων των υποδιαγώνιων στοιχείων της δεύτερης στήλης του A_{k+1}.

Προς τούτο, θα πραγματοποιήσουμε τον μετασχηματισμό :

$$A_{k+2} = L_{k+1}^{-1} \cdot A_{k+1} \cdot L_{k+1} ,$$

με:

$$L_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & \text{O} & \\ 0 & y_3 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & \text{O} & & \\ 0 & y_n & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad L_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & \text{O} & \\ 0 & y_3 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & \text{O} & & \\ 0 & y_n & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία y_i προσδιορίζονται σαν λύση του συστήματος :

$$\begin{pmatrix} a_{3,3}^{(k+1)} - \alpha_{2,2}^{(k+1)} & a_{3,4}^{(k+1)} & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & a_{3,n}^{(k+1)} \\ & a_{4,4}^{(k+1)} - a_{2,2}^{(k+1)} & a_{4,5}^{(k+1)} & \cdots\cdots\cdots & a_{4,n}^{(k+1)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \text{O} & & a_{n-1,n-1}^{(k+1)} - a_{2,2}^{(k+1)} & a_{n-1,n}^{(k+1)} \\ & & & & a_{n,n}^{(k+1)} - a_{2,2}^{(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -a_{3,2}^{(k+1)} \\ -a_{4,2}^{(k+1)} \\ \vdots \\ -a_{n-1,2}^{(k+1)} \\ -a_{n,2}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

και ούτω καθεξής.

Ο τελευταίος μετασχηματισμός L_{k+n-2} υλοποιείται από τον πίνακα:

$$L_{k+n-2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & \text{O} & \\ & 0 & \ddots & & \\ \text{O} & & \ddots & 1 & \\ & & & z_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήσεις ΙΙ.5.3.5.(i). Εάν ο πίνακας A έχει συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές, η πιο πάνω μέθοδος ανακατασκευάζεται έτσι ώστε σε κάθε στάδιο να γίνεται ταυτόχρονη επεξεργασία δύο στηλών.

(ii). Εάν ο πίνακας A είναι συμμετρικός, τότε προτιμάται η *μέθοδος Cholesky* αντί για την μέθοδο Gauss. Σύμφωνα με την μέθοδο Cholesky, οι πίνακες L_k και R_k επιλέγονται έτσι ώστε ο ένας να είναι ο ανάστροφος του άλλου και επομένως θα είναι:

$$A_k = L_k \cdot L_k^T \text{ και } A_{k+1} = L_k^T \cdot L_k .$$

Εάν η μέθοδος συγκλίνει, βλέπουμε ότι, λόγω της συμμετρίας, θα καταλήξουμε σ' έναν διαγώνιο πίνακα. ■

Όπως ήδη επισημάνθηκε, η σύγκλιση του αλγόριθμου LR είναι αργή. Μία άλλη ιδέα που θα μπορούσε να επιταχύνει την σύγκλιση (εκτός από την ιδέα του Rutishauser) είναι η ελάττωση του όγκου των υπολογισμών που απαιτούνται σε κάθε επανάληψη. Μία τέτοια ελάττωση είναι δυνατή, μετά από μετατροπή του αρχικού πίνακα *A* σε πίνακα που είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg, γιατί :

Θεώρημα ΙΙ.5.3.6. ***Η (άνω) μορφή Hessenberg παραμένει αμετάβλητη από τον αλγόριθμο*** LR **.**

Απόδειξη. Επειδή είναι $A_{k+1} = L_k^{-1} \cdot A_k \cdot L_k$, όπου οι πίνακες L_k και L_k^{-1} είναι κάτω τριγωνικοί με όλα τα στοιχεία των κύριων διαγωνίων τους ίσα με 1, έπεται εύκολα ότι εάν ο πίνακας A_k είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg,τότε και ο πίνακας A_{k+1} είναι σε τέτοια μορφή.■

Εάν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο LR σ' έναν πίνακα που είναι σε (άνω) μορφή Hessenberg, τότε είναι δυνατόν να ενεργοποιήσουμε μία διαδικασία επιτάχυνσης της σύγκλισης που αποβαίνει ιδιαίτερα αποτελεσματική. Πρόκειται για την μέθοδο των μετατοπίσεων του μηδενός.

Είναι γνωστό ότι, κατά τον αλγόριθμο LR, συμβαίνει :

$$a_{i,j}^{(k)} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k\right), \quad i > j .$$

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα $A - p \cdot \mathrm{I}$. Προφανώς, έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_i - p$ και, κατά τον αλγόριθμο LR, έχουμε:

$$a_{i,j}^{(k)} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_i - p}{\lambda_j - p}\right)^k\right) \qquad , i > j.$$

Όταν τώρα ο πίνακας A είναι σε (άνω) μορφή *Hessenberg*, τότε τα μόνα μη-μηδενικά υποδιαγώνια στοιχεία του είναι τα $a_{i+1,i}^{(k)}$. Άρα:

$$a_{n,n-1}^{(k)} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\lambda_n - p}{\lambda_{n-1} - p}\right)^k\right),$$

και εάν το p είναι μία καλή προσέγγιση του λ_n, τότε το $a_{n,n-1}^{(k)}$ θα τείνει προς το 0 πολύ γρήγορα.

Συνεπώς, είναι προτιμητέο να εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας τον πίνακα $A_k - p \cdot \mathrm{I}$ αντί για τον πίνακα A_k.

Θα πραγματοποιήσουμε λοιπόν την διάσπαση LR του $A_k - p \cdot \mathrm{I}$, ή πιο γενικά, αυτήν του

$$A_k - p_k \cdot \mathrm{I},$$

που θα δώσει τον αλγόριθμο LR με μετατοπίσεις στο 0.

Επειδή:

$$A_k - p_k \cdot \mathrm{I} = L_k \cdot R_k,$$
$$A_{k+1} = R_k \cdot L_k + p_k \cdot \mathrm{I},$$

έχουμε:

$$A_{k+1} = L_k^{-1} \cdot (A_k - p_k \cdot \mathrm{I}) \cdot L_k + p_k \cdot \mathrm{I} = L_k^{-1} \cdot A_k \cdot L_k,$$

που δείχνει ότι, και σ' αυτήν την περίπτωση, όλοι οι πίνακες A_κ είναι όμοιοι μεταξύ τους.

Με ανάλογο τρόπο, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

$$A_{k+1} = P_k^{-1} \cdot A_k \cdot P_k,$$

με $P_k = L_0 \cdot L_1 \ldots L_k$.

Στην πράξη ένα πρόβλημα που τίθεται είναι αυτό της επιλογής των μετατοπίσεων p_k προκειμένου να επιτευχθεί μία γρήγορη σύγκλιση.

Εάν οι απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του A είναι διάφορες ανά δύο, τότε τα $a_{n,n-1}^{(k)}$ θα τείνουν προς το 0 και τα $a_{n,n}^{(k)}$ προς το λ_n. Η επιλογή

$$p_k = a_{n,n}^{(k)}$$

έρχεται λοιπόν αμέσως στο μυαλό, από την στιγμή όπου τα $a_{n,n-1}^{(k)}$ είναι επαρκώς μικρά ή από την στιγμή που υπάρχουν ενδείξεις ότι τα $a_{n,n}^{(k)}$ συγκλίνουν.

Μάλιστα, μπορεί κανείς να δείξει εύκολα πως εάν $a_{n,n-1}^{(k)} = \mathrm{O}(\varepsilon)$ τότε

$$a_{n,n-1}^{(k+1)} = \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Από την στιγμή όπου το $a_{n,n-1}^{(k)}$ έγινε σχεδόν μηδέν (με κάποια ικανοποιητική ακρίβεια), το $a_{n,n}^{(k)}$ ισούται με το λ_n (περίπου).

Οι απομένουσες ιδιοτιμές είναι αυτές του κυρίου υποπίνακα που σχηματίζεται από τις $n-1$ πρώτες γραμμές και τις $n-1$ πρώτες στήλες. Αυτός ο υποπίνακας είναι πάλι σε (άνω) μορφή Hessenberg και μπορούμε να ξαναρχίσουμε τους ίδιους με πριν υπολογισμούς αλλά αυτή τη φορά για τον υποπίνακα διάστασης $n-1$ που σχηματίστηκε μόλις πριν, και ούτω καθ' εξής. Αυτή η μέθοδος ύφεσης είναι αριθμητικά πολύ σταθερή.

Στην πράξη δεν ξεκινάμε τις μετατοπίσεις του μηδενός παρά μόνον όταν:

$$\left| 1 - \frac{a_{n,n}^{(k+1)}}{a_{n,n}^{(k)}} \right| < \varepsilon.$$

Η εμπειρία έχει δείξει ότι η τιμή

$$\varepsilon = \frac{1}{3}$$

δίνει καλά αποτελέσματα.

Για λόγους διευκόλυνσης του προγραμματισμού ενός αριθμητικού υπολογιστή, χρησιμοποιούμε επίσης τον επόμενο τρόπο μετατοπίσεων του μηδενός :

$$A_k - p_k \cdot \mathrm{I} = L_k \cdot R_k,$$

$$A_{k+1} = R_k \cdot L_k,$$

έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του A_{k+1} να είναι οι αριθμοί

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^{k} p_j.$$

II.5.4. Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ QR

Αυτός ο αλγόριθμος επινοήθηκε το 1961 από τους ***Francis*** και ***Kubnanovskaya***, ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Σύμφωνα μ' αυτόν τον αλγόριθμο, οι πίνακες B_k επιλέγονται να είναι ορθογώνιοι (και συμβολίζονται με Q_k στην συνηθισμένη βιβλιογραφία), ενώ οι πίνακες C_k επιλέγονται άνω τριγωνικοί (και συμβολίζονται με R_k).

Για να γίνουν αυτές οι επιλογές, χρησιμοποιείται η διάσπαση Householder για την επίλυση τετραγωνικών συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Θυμίζουμε ότι έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει αυτήν την διάσπαση προκειμένου να μετατρέψουμε έναν πίνακα σε πίνακα που έχει τεθεί σε (άνω) μορφή Hessenberg. Αυτή η διάσπαση πραγματοποιείται με την βοήθεια $n-1$ γινομένων με στοιχειώδεις ορθογώνιους πίνακες (αντί $n-2$ για να πετύχουμε την μορφή Hessenberg).

Έστω ότι θέλουμε να διασπάσουμε τον πίνακα A_k σε:

$$A_k = Q_k \cdot R_k .$$

Θέτουμε

$$D_0 := A_k$$

και πραγματοποιούμε τους διαδοχικούς ορθογώνιους μετασχηματισμούς:

$$D_r = P_r \cdot D_{r-1} \quad (r = 1,\ldots,n-1),$$

όπου ο πίνακας D_{r-1} είναι της μορφής :

$$D_{r-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_{1,1}^{(2)} & \cdots\cdots & d_{1,r-1}^{(1)} & d_{1,r}^{(1)} & \cdots\cdots & d_{1,1}^{(2)} \\ & d_{2,2}^{(2)} \cdots & d_{2,r-1}^{(2)} & d_{2,r}^{(2)} & \cdots\cdots & d_{2,n}^{(2)} \\ \mathrm{O} & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & d_{r-1,r-1}^{(r-1)} & d_{r-1,r}^{(r-1)} & \cdots\cdots & d_{r-1,n}^{(r-1)} \\ \hline & & & d_{r,r}^{(r-1)} & \cdots\cdots & d_{r,n}^{(r-1)} \\ & \mathrm{O} & & \vdots & \vdots & \\ & & & d_{n,r}^{(r-1)} & \cdots\cdots & d_{n,n}^{(r-1)} \end{array}\right)$$

Έχουμε ήδη δει ότι υπάρχει $w_r \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε εάν:

$$P_r = \mathrm{I} - 2 \cdot w_r \cdot w_r^T,$$

τότε ο πίνακας:

$$D_r = P_r \cdot D_{r-1} \cdot P_k$$

να είναι ένας τριγωνικός κύριος $r \times r$ υποπίνακας. Έτσι, τελικά, ο πίνακας D_{n-1} θα είναι άνω τριγωνικός και τέτοιος ώστε:

$$D_{n-1} = P_{n-1} \ldots P_1 \cdot A_k.$$

Απ' αυτήν την ισότητα προκύπτει η διάσπαση QR, αφού προηγουμένως λάβουμε:

$$Q_k = P_{n-1} \ldots P_1 \quad \text{και} \quad R_k = D_{n-1},$$

γιατί $Q_k^{-1} = Q_k^{\mathrm{T}} = Q_k$.

Το παρακάτω *Θεώρημα* περιγράφει τις γενικές συνθήκες κάτω από τις οποίες ο αλγόριθμος QR συγκλίνει :

Θεώρημα ΙΙ.5.4.1. ***Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και εάν τα μέτρα των ιδιοτιμών του είναι διάφορα ανά δύο, τότε ο αλγόριθμος QR συγκλίνει και ο πίνακας A_∞ είναι τριγωνικός.*** ■

Δεν θα αποδείξουμε αυτό το *Θεώρημα*, δεδομένου ότι μπορούμε ν' αποδείξουμε ένα άλλο θεωρητικό αποτέλεσμα για τον αλγόριθμο QR που είναι πολύ πιο σημαντικό από το προηγούμενο. Πρόκειται για ένα σπουδαίο Θεώρημα που επιβεβαιώνει την ανωτερότητα του αλγορίθμου QR έναντι του αλγορίθμου LR .

Αλλά, κατ' αρχήν, πρέπει ν' αναφέρουμε το εξής:

Θεώρημα ΙΙ.5.4.2. ***Η (άνω) μορφή Hessenberg παραμένει αμετάβλητη από τον αλγόριθμο QR .*** ■

(Η απόδειξη αυτού του *Θεωρήματος* είναι ακριβώς ίδια με την αντίστοιχη που αφορούσε την περίπτωση του αλγορίθμου LR).

Θεώρημα ΙΙ.5.4.3. ***Εάν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο QR σ' ένα πίνακα A, που έχει τεθεί σε (άνω) μορφή Hessenberg και που είναι τέτοιος ώστε***

$$a_{i+1,i} \neq 0 \text{ για } i = 1,2,\ldots,n-1,$$

τότε ο αλγόριθμος QR συγκλίνει και ο πίνακας A_∞ είναι όμοιος με τον A .

Επί πλέον, ο A_∞ είναι τριγωνικός εάν και μόνον εάν οι ιδιοτιμές του A έχουν μέτρα ανά δύο διάφορα μεταξύ τους. ■

Γενικά, ο αλγόριθμος QR συγκλίνει αργά. Γι' αυτό είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των μετατοπίσεων του μηδενός :

$$A_k - p_k \cdot \mathrm{I} = Q_k \cdot R_k$$

$$A_{k-1} = R_k \cdot Q_k + P_k \cdot \mathrm{I}.$$

Ο *C.Lebaud* έδειξε ότι, κάτω από ορισμένες υποθέσεις, υπάρχει ένας δείκτης k από τον οποίο και μετά μπορούμε να αρχίσουμε τις μετατοπίσεις του μηδενός και να είμαστε σίγουροι για την σύγκλιση της μεθόδου.

Δυστυχώς, αυτός ο δείκτης k μπορεί να βρεθεί δύσκολα, γι' αυτό και περιοριζόμαστε στην πραγματοποίηση των μετατοπίσεων του μηδενός όταν το $a_{n,n-1}^{(k)}$ είναι μικρό (δηλαδή όπως και στην περίπτωση του αλγόριθμου LR).

Παρ' όλα αυτά, οι εφαρμογές του αλγορίθμου QR είναι πολύ διαδεδομένες και στην πράξη είναι ένας από τους πιο χρήσιμους αλγορίθμους.

Κεφάλαιο 3
Αριθμητική Επίλυση Αλγεβρικών Εξισώσεων και Συστημάτων Γραμμικών Αλγεβρικών Εξισώσεων

ΙΙΙ.1.ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΙΙΙ.1.1. ΓΕΝΙΚΑ

Ένα από τα παλαιότερα και βασικότερα προβλήματα που αντιμετωπίζεται στις εφαρμογές είναι η εύρεση των ριζών μίας εξίσωσης της μορφής:

$$f(\xi) = 0,$$

όπου η $f(z)$ είναι μία συνάρτηση της πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής *z*.

Όμως το γενικότερο πρόβλημα με το οποίο θα καταπιαστούμε στη συνέχεια είναι το ακόλουθο:

"Εάν $U \subseteq K^n$ ***και*** $F : U \to U$ ***να βρεθούν σημεία*** $\xi \in U$ ***τέτοια ώστε:***

$$\xi = F(\xi)."$$

Σε μία τέτοια περίπτωση, λέμε ότι ***το ξ είναι ένα σταθερό σημείο της απεικόνισης F***.

Σκοπός μας δεν είναι η παρουσίαση Θεωρημάτων ύπαρξης σταθερών σημείων μίας απεικόνισης, αλλά η απόδειξη δύο γενικών αποτελεσμάτων που θα χρησιμεύσουν στην πιστοποίηση της σύγκλισης των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης που θα μελετήσουμε στις επόμενες *Παραγράφους*. Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων σταθερού σημείου είναι επαναληπτικές μέθοδοι και συνίστανται στην παραγωγή μίας ακολουθίας $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ της οποίας το όριο υπάρχει και είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο. Ένας δεύτερος σκοπός, που θέτουμε, είναι η παροχή των απαραίτητων μαθηματικών εργαλείων για την μέτρηση των ταχυτήτων σύγκλισης τέτοιων ακολουθιών καθώς και την σύγκριση των ταχυτήτων αυτών μεταξύ τους.

Ανάλογα με την περίπτωση, θα γράφουμε την εξίσωση που πρόκειται να λύσουμε υπό την μορφή:

$$\xi = F(\xi) \qquad \text{ή} \qquad f(\xi) = 0,$$

αφού είναι προφανές ότι μπορούμε να περάσουμε από την μία μορφή στην άλλη γράφοντας :

$$f(z) = z - F(z).$$

Ορισμός ΙΙΙ.1.1.1. ***Έστω $E \subset U$. Εάν υπάρχει $\lambda \in [0,1]$ τέτοιο ώστε:***

$$\| F(u) - F(w) \| \le \lambda \| u - w \|, \text{ για κάθε } u \in E,\ w \in E,$$

τότε η F ονομάζεται απεικόνιση Lipschitz ή συστολή του E και η σταθερά λ λέγεται συντελεστής Lipschitz ή συντελεστής συστολής. ■

Θα δώσουμε τώρα την παρουσίαση μίας συνθήκης που εξασφαλίζει την ύπαρξη και την μοναδικότητα ενός σταθερού σημείου ξ.

Θεώρημα ΙΙΙ.1.1.2. ***Έστω*** $\overline{B^n(\xi^{(0)},\varepsilon)} = \{w \in K^n : \|z^{(0)} - w\| \le \varepsilon\}$ ***η κλειστή μπάλα του*** K^n ***με κέντρο*** $\xi^{(0)}$ ***και ακτίνα*** ε***. Υποθέτουμε ότι*** $\overline{B^n(\xi^{(0)},\varepsilon)} \subset U$ ***και ότι η*** $F : U \to U$ ***είναι μία απεικόνιση Lipschitz του*** $\overline{B^n(\xi^{(0)},\varepsilon)}$ ***με συντελεστή συστολής*** λ ***τέτοιο ώστε :***

$$\|F(\xi^{(0)}) - \xi^{(0)}\| \le (1-\lambda)\,\varepsilon.$$

Τότε, η επαναληπτική ακολουθία:

$$(\xi^{(\nu+1)} = F(\xi^{(\nu)}) : \quad \nu = 0,1,2,...)$$

συγκλίνει προς το μοναδικό σημείο $\xi = F(\xi)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι:

$$\xi^{(1)} = F(\xi^{(0)}) \in \overline{B^n(\xi^{(0)},\varepsilon)},$$

γιατί $\|F(\xi^{(0)}) - \xi^{(0)}\| \le (1 - \lambda)\ \varepsilon \le \varepsilon$, δεδομένου ότι $0 \le \lambda \le 1$. Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή ότι:

$$\|\xi^{(\nu)} - \xi^{(0)}\| \le (1 - \lambda^{\nu})\,\varepsilon, \quad \nu = 0,1,2,...$$

Πράγματι, από την επαγωγική υπόθεση έπεται :

$$\begin{aligned}\|\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(0)}\| &\le \|\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)}\| - \|\xi^{(\nu)} - \xi^{(0)}\| \\ &\le \|F(\xi^{(\nu)}) - F(\xi^{(\nu-1)})\| + (1-\lambda^{\nu})\,\varepsilon \\ &\le \lambda\|\xi^{(\nu)} - \xi^{(\nu-1)}\| + (1-\lambda^{\nu})\,\varepsilon\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \left\| F(\xi^{(v-1)}) - F(\xi^{(v-2)}) \right\| + (1-\lambda^{v})\varepsilon \\
&\le \lambda^{2} \left\| \xi^{(v-1)} - \xi^{(v-2)} \right\| + (1-\lambda^{v})\varepsilon \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\le \lambda^{v} \left\| \xi^{(1)} - \xi^{(0)} \right\| + (1-\lambda^{v})\varepsilon \\
&\le \lambda^{v}(1-\lambda)\,\varepsilon + (1-\lambda^{v})\,\varepsilon \\
&= (1-\lambda^{v+1})\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, όλα τα σημεία:

$$\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(v)}, \ldots$$

ανήκουν στην μπάλα $\overline{B^{n}(\xi^{(0)}, \varepsilon)}$. Από την άλλη πλευρά, η ακολουθία:

$$(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(v)}, \ldots)$$

είναι μία *ακολουθία Cauchy*, υπό την έννοια ότι οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων της μικραίνουν απεριόριστα.

Πράγματι, σύμφωνα με ό,τι προηγήθηκε, είναι:

$$
\begin{aligned}
\left\| \xi^{(v+p)} - \xi^{(v)} \right\| &\le \left\| \xi^{(v+p)} - \xi^{(v+p-1)} \right\| + \left\| \xi^{(v+p-1)} - \xi^{(v+p-2)} \right\| + \ldots + \left\| \xi^{(v+1)} - \xi^{(v)} \right\| \\
&\le (\lambda^{v+p-1} + \lambda^{v+p-2} + \ldots + \lambda^{v}) \left\| \xi^{(1)} - \xi^{(0)} \right\| \\
&= \lambda^{v}(1 + \lambda + \ldots + \lambda^{p-1}) \left\| \xi^{(1)} - \xi^{(0)} \right\| \\
&= \lambda^{v} \frac{1-\lambda^{p}}{1-\lambda} \left\| \xi^{(1)} - \xi^{(0)} \right\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \lambda^{p}.
\end{aligned}
$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\delta > 0$ είναι δυνατή η εύρεση ενός φυσικού αριθμού N (εν προκειμένω, τέτοιου ώστε: $\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\lambda^{N} < \delta$), έτσι ώστε οι αποστάσεις $\left\|\xi^{(\mu)} - \xi^{(\nu)}\right\|$, με $\mu \geq N$, $\nu \geq N$, να είναι όλες μικρότερες από δ.

Με άλλα λόγια, η ακολουθία $(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(\nu)}, \ldots)$ είναι όντως μία ακολουθία Cauchy. Αποδεικνύεται, με τρόπο όχι στοιχειώδη του οποίου η παρουσίαση ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος βιβλίου, ότι υπάρχει κάποιο σημείο $\xi \in \boldsymbol{K}^n$ προς το οποίο αυτή η ακολουθία Cauchy συγκλίνει. (Για μία απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.11 του κλασσικού συγγράμματος "*Principles of Mathematical Analysis*" του περίφημου σύγχρονου μαθηματικού *W. Rudin*, από τις εκδόσεις *McGraw-Hill*).

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην *Παράγραφο Ι.3.3*, επειδή η μπάλα $\overline{B^n(\xi^{(0)}, \varepsilon)}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\boldsymbol{K}^n$, το σημείο ξ θα ανήκει στην μπάλα. Δηλαδή, τελικά θα είναι:

$$\overline{B^n(\xi^{(0)}, \varepsilon)} \ni \xi^{(\nu)} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \xi \in \overline{B^n(\xi^{(0)}, \varepsilon)}$$

Επί πλέον, επειδή η απεικόνιση F είναι Lipschitz θα είναι και συνεχής. Επομένως:

$$\xi = \lim_{\nu \to \infty} \xi^{(\nu+1)} = \lim_{\nu \to \infty} F(\xi^{(\nu)}) = F(\xi)$$

και έτσι το σημείο ξ είναι σταθερό σημείο της F. Απομένει να δειχθεί ότι δεν υπάρχει άλλο σταθερό σημείο της F μέσα στην μπάλα $\overline{B^n(\xi^{(0)}, \varepsilon)}$. Εάν υποθέσουμε ότι υπήρχε και δεύτερο σταθερό σημείο $\tilde{\xi}$ της F μέσα στην μπάλα, τότε θα είχαμε:

$$\left\|\xi - \tilde{\xi}\right\| = \left\|F(\tilde{\xi}) - F(\tilde{\xi})\right\| \leq \lambda \left\|\xi - \tilde{\xi}\right\| < \left\|\xi - \tilde{\xi}\right\|,$$

που είναι προφανώς αδύνατο. Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι τώρα ολοκληρωμένη. ■

Παρατηρήσεις ΙΙΙ.1.1.3.(i). Εάν, στην προηγούμενη *Απόδειξη*, αφήσουμε τον δείκτη p να τείνει προς το άπειρο, μπορούμε να επιτύχουμε μία εκτίμηση για το σφάλμα σ_v στο οποίο υποπίπτουμε κατά την $v-$οστή επανάληψη:

$$\sigma_v = \left\|\xi - \xi^{(v)}\right\| \le \frac{\lambda^v}{1-\lambda}\left\|\xi^{(1)} - \xi^{(0)}\right\|.$$

(ii). Η βασική υπόθεση του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.1.2* είναι πολύ περιοριστική και δύσκολα επαληθεύσιμη στην πράξη. ■

Θα δείξουμε τώρα ένα αποτέλεσμα τοπικής σύγκλισης, που θα είναι σαφώς πιο ασθενές, όμως, από την άλλη μεριά, δεν θα επικαλείται παρά μόνον κάποιες τοπικές προϋποθέσεις συμπεριφοράς της F. Προς τούτο, είναι ανάγκη να θυμίσουμε τον επόμενο *Ορισμό*:

Ορισμός ΙΙΙ.1.1.4. ***Έστω ότι το σύνολο U είναι ένα ανοικτό μέρος του $\mathbb{K}^n$. Η απεικόνιση $F: U \to U$ έχει διαφορικό στο σημείο $z \in U$, εάν υπάρχει μία $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση:***

$$d_z F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : h \mapsto (d_z F)(h)$$

τέτοια ώστε:

$$F(z+h) = F(z) + (d_z F)(h) + o(z,h),$$

για κάθε h που βρίσκεται αρκετά κοντά στο $0 \in \mathbb{K}^n$ ώστε $(z+h) \in U$. Το σύμβολο $o(z,h)$ αναπαριστά κάποια συνάρτηση του h και του z με την ιδιότητα οι τιμές της να είναι πολύ μικρές όταν το h πλησιάζει το $0 \in \mathbb{K}^n$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left\|o(z,h)\right\|}{\left\|h\right\|} = 0$$

Σε μία τέτοια περίπτωση, η απεικόνιση d_zF ονομάζεται διαφορικό ή ολική παράγωγος της F στο σημείο z, ενώ η απεικόνιση F καλείται διαφορίσιμη ή παραγωγίσιμη στο σημείο z. ■

Παρατηρήσεις ΙΙΙ.1.1.5.(i). Η βασική αξίωση των προϋποθέσεων του προηγούμενου Ορισμού είναι η $\mathbb{R}$–γραμμικότητα της απεικόνισης $(d_zF):\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει:

$$\forall u \in \mathbb{K}^n,\ \forall w \in \mathbb{K}^n \Rightarrow (d_zF)(u+w) = (d_zF)(u) + (d_zF)(w),$$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \ \forall u \in \mathbb{K}^n \Rightarrow (d_zF)(a \cdot u) = a \cdot (d_zF)(u).$$

Αντιπαραβάλλοντας την έννοια της $\mathbb{R}$–γραμμικότητας με αυτήν της $\mathbb{C}$–γραμμικότητας, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην *Παράγραφο Ι.1.2*, βλέπουμε ότι ***η $\mathbb{C}$–γραμμικότητα συνεπάγεται την $\mathbb{R}$–γραμμικότητα, ενώ το αντίθετο δεν ισχύει γενικά.***

(ii). Εάν το διαφορικό d_zF της F στο z υπάρχει και δεν είναι απλά $\mathbb{R}$–γραμμική απεικόνιση, αλλά είναι και $\mathbb{C}$-γραμμική με την έννοια της *Παραγράφου Ι.1.2*, τότε αποδεικνύεται ότι οι συνιστώσες $F_1, F_2, \ldots, F_n$ της *F* επαληθεύουν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους:

$$\left\{ \frac{\partial F_\kappa}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0 \qquad 1 \le j \le n \right\}$$

στο σημείο *z*. Εάν αυτό συμβαίνει σε κάθε σημείο $z \in U$, τότε λέμε ότι ***η κάθε συνιστώσα F_κ της F είναι λύση των (ομογενών) εξισώσεων Cauchy-Riemann στο U και η απεικόνιση F καλείται ολόμορφη***. Ας σημειωθεί ότι:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}.\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i.\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \qquad 1 \le j \le n,$$

όπου $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένες του $\boldsymbol{R}^{2n} = \boldsymbol{C}^n$. ■

Θα αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο :

Θεώρημα ΙΙΙ.1.1.6 ***Έστω ξ ένα σταθερό σημείο της F. Εάν η F είναι διαφορίσιμη μέσα σε μία περιοχή του ξ και εάν:***

$$\|d_\xi F\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|(d_\xi F)(h)\|}{\|h\|} < 1,$$

τότε υπάρχει μία περιοχή του ξ τέτοια ώστε, για κάθε σημείο $\xi^{(0)}$ που ανήκει σ' αυτήν την περιοχή, η επαναληπτική ακολουθία :

$$(\xi^{(v+1)} = F(\xi^{(v)}) : v = 0,1,2,\ldots),$$

με αρχικό σημείο το σημείο $\xi^{(0)}$, να συγκλίνει προς το ξ.

Απόδειξη. Επειδή:

$$\xi^{(1)} - \xi = F(\xi^{(0)}) - F(\xi) = (d_\xi F)(\xi^{(0)} - \xi) + o(\xi, \xi^{(0)} - \xi),$$

θα είναι και:

$$\frac{\xi^{(1)} - \xi}{\xi^{(0)} - \xi} = \frac{(d_\xi F)(\xi^{(0)} - \xi)}{\xi^{(0)} - \xi} + \frac{o(\xi, \xi^{(0)} - \xi)}{\xi^{(0)} - \xi},$$

οπότε εκμεταλλευόμενοι την υπόθεση ότι $\|d_\xi F\| < 1$,: παίρνουμε:

$$\frac{\left\|\xi^{(1)}-\xi\right\|}{\left\|\xi^{(0)}-\xi\right\|} \le \left\|d_{\xi}F\right\| + \frac{\left\|o(\xi,\xi^{(0)}-\xi)\right\|}{\left\|\xi^{(0)}-\xi\right\|},$$

Θέτουμε:

$$\left\|d_{\xi}F\right\| = 1-\mathrm{a} \quad \text{με } 0<\mathrm{a}\le 1,$$

και παρατηρούμε ότι, επειδή:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|o(\xi,h)\right\|}{\left\|h\right\|} = 0\,,$$

υπάρχει $b>0$ τέτοιο ώστε για κάθε σημείο *w*, που ανήκει στην περιοχή του ξ που ορίζεται από την ανισοτική σχέση $\left\|w-\xi\right\|<b$, να ισχύει:

$$\frac{\left\|o(\xi,z^{(0)}-\xi)\right\|}{\left\|\xi^{(0)}-\xi\right\|} \le \mathrm{a}'<\mathrm{a}.$$

Επομένως, εάν $\xi^{(0)} \in \overline{B^{(n)}(\xi,b)} = \{w\in \boldsymbol{K}^{n} : \left\|w-\xi\right\|\le b\}$, τότε:

$$\frac{\left\|\xi^{(1)}-\xi\right\|}{\left\|\xi^{(0)}-\xi\right\|} \le 1-\mathrm{a}+\mathrm{a}',$$

δηλαδή θα ισχύει:

$$\left\|\xi^{(1)}-\xi\right\| \le L\left\|\xi^{(0)}-\xi\right\|,$$

με $0\le L<1$ και $L=1-\mathrm{a}+\mathrm{a}'$.

Επαναδιατυπώνοντας τα ίδια επιχειρήματα, βρίσκουμε

$$0 \le L < 1 \quad \text{και} \quad L = 1 - \mathrm{a} + \mathrm{a}'.$$

Επαναδιατυπώνοντας τα ίδια επιχειρήματα, βρίσκουμε ότι εάν $\xi^{(1)} \in \overline{B^n(\xi, b)}$, τότε:

$$\left\|\xi^{(2)} - \xi\right\| \le L^2 \left\|\xi^{(0)} - \xi\right\|,$$

αλλά και γενικότερα, εάν $\xi^{(\nu)} \in \overline{B^n(\xi, b)}$, τότε:

$$\left\|\xi^{(\nu)} - \xi\right\| \le L^\nu \left\|\xi^{(0)} - \xi\right\| \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots)$$

με $0 \le L < 1$ και $L = 1 - \mathrm{a} + \mathrm{a}'$.

Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα αποδεικνύει το *Θεώρημα* και επί πλέον, παρέχει μία εκτίμηση του σφάλματος που προκύπτει κατά την *ν*-οστή επανάληψη. ■

Στην συνέχεια, θα επιδιώξουμε να δώσουμε μία γεωμετρική αναπαράσταση της εξέλιξης της επαναληπτικής διαδικασίας που συζητάμε.

Προς τούτο, θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου η F είναι μια απεικόνιση από το $\mathbb{R}$ μέσα στο $\mathbb{R}$. Η αναζήτηση ενός σταθερού σημείου της F ισοδυναμεί με την αναζήτηση της τομής των καμπυλών :

$$y = x \ \text{και} \ y = F(x).$$

Πραγματοποιούμε τις επαναλήψεις:

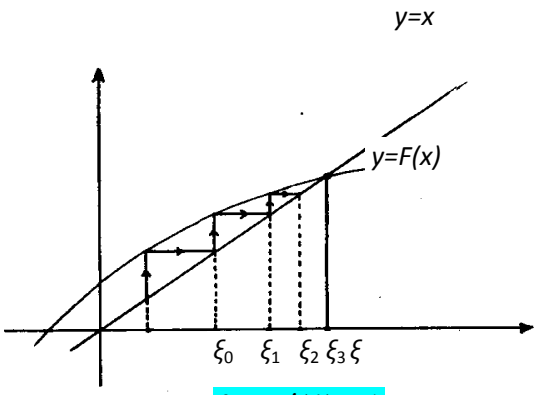
$$\xi_{\nu+1} = F(\xi_\nu),$$

σύμφωνα με τα ακόλουθα σχήματα :

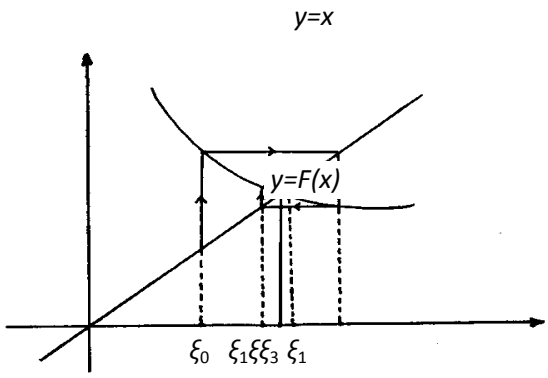
❖ *Εάν η F είναι διαφορίσιμη στην περιοχή του σταθερού της σημείου ξ, τότε , επειδή $(d_\xi F)(h) = F'(\xi)\,h$, όπου $F'(\xi)$ είναι η παράγωγος της F στο ξ, ισχύει:*

$$\|d_\xi F\| = \|F'(\xi)\|,$$

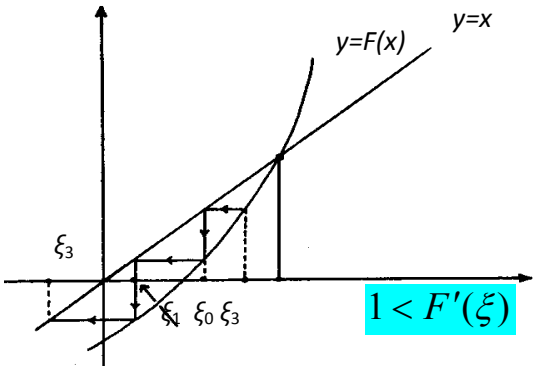
και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:



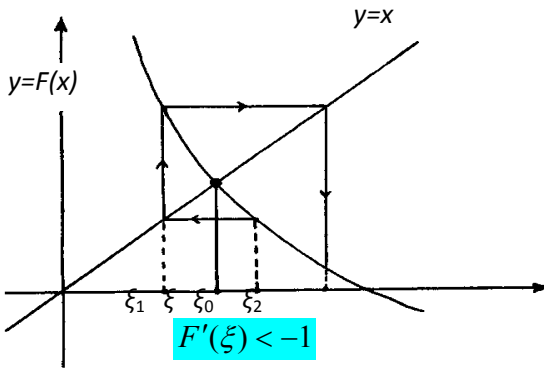
$0 < F'(\xi) < 1$



$-1 < F'(\xi) < 0$



$1 < F'(\xi)$



$F'(\xi) < -1$

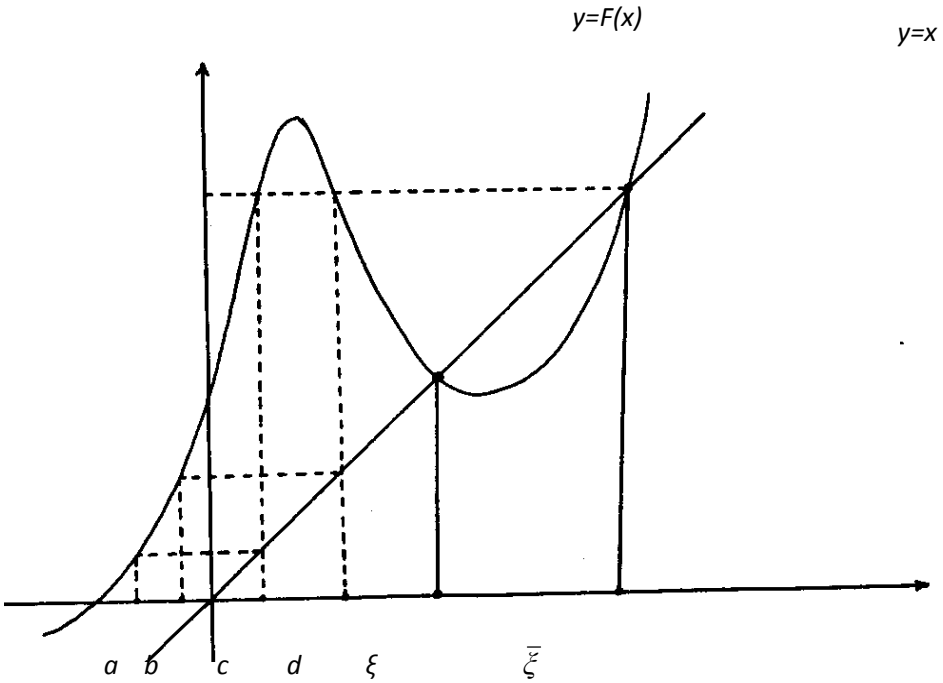
Αυτά τα σχήματα επιτρέπουν την εποπτική επαλήθευση του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.1.6*. Σύμφωνα με αυτά τα σχήματα, όταν $\|d_\xi F\| = |F'(\xi)| < 1$, υπάρχει μια περιοχή V_ξ του ξ τέτοια ώστε οι επαναλήψεις $\xi_1 = F(\xi_0), \xi_2 = F(\xi_1), \ldots, \xi_{\nu+1} = F(\xi_\nu), \ldots$ να συγκλίνουν προς το σταθερό σημείο ξ κι αυτό για κάθε επιλογή του αρχικού ξ_0 μέσα σ' αυτήν την περιοχή. Σ' αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι το σημείο ξ είναι ένα ***σημείο έλξης***. Στην πράξη, η δυσκολία που συναντάμε είναι ο εντοπισμός αυτής

ακριβώς της περιοχής V_ξ. Αντίθετα, όταν $\|d_\xi F\| = |F'(\xi)| > 1,$ οι επαναλήψεις $\xi_1 = F(\xi_0), \xi_2 = F(\xi_1), \ldots, \xi_{v+1} = F(\xi_v), \ldots$ αποκλίνουν γενικά από το σταθερό σημείο ξ κι αυτό για κάθε επιλογή του αρχικού σημείου ξ_0. Σ' αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι το σημείο ξ είναι ένα ***σημείο άπωσης***.

❖ *Εάν η F δεν είναι διαφορίσιμη στην περιοχή του σταθερού της σημείου ή εάν η F έχει πολλά σταθερά σημεία, τότε η κατάσταση είναι πολύ πιο πολύπλοκη*. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο ακόλουθο ενδεικτικό σχήμα :

Σύμφωνα μ' αυτό το ενδεικτικό σχήμα, *εάν $a < \xi < b$ ή $c < \xi < d$ και $\xi > \bar{\xi}$, τότε οι επαναλήψεις αποκλίνουν*. Αντίθετα, εάν $b < \xi < c$ ή $d < \xi < \bar{\xi}$, *τότε οι επαναλήψεις συγκλίνουν προς το ξ*. Δηλαδή, ο τόπος έλξης του σημείου ξ απαρτίζεται από ανοικτά διαστήματα διάφορα ανά δύο μεταξύ τους.

Θα στραφούμε τώρα στην αναζήτηση των απαραίτητων μαθηματικών εργαλείων που θα επιτρέψουν την "μέτρηση" των ταχυτήτων σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης ενός προβλήματος καθώς και την "σύγκριση" μεταξύ τους. Κατ' αρχάς, εισάγουμε τον επόμενο *Ορισμό*:



Ορισμός ΙΙΙ.1.1.7. ***Μία νόρμα στο*** K^n ***είναι μία απεικόνιση***

$$\phi : K^n \to [0,+\infty[$$

με τις εξής ιδιότητες :

(i). $\phi(x) \geq 0$ ***και*** $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii). $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$

(iii). $\phi(a \cdot x) = |a|\, \phi(x)$

για κάθε $x \in K^n, y \in K^n$ ***και*** $a \in R$ **(ή** $a \in C$ **).** ■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ακολουθία σημείων του K^n :

$$(z^{(\nu)}) = (z^{(\nu)} = (z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}, \ldots, z_n^{(\nu)}) : \nu = 0,1,2,\ldots)$$

συγκλίνει προς ένα σημείο:

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in K^n$$

ως προς την νόρμα ϕ του K^n, δηλαδή ότι:

$$\lim_{\nu \to \infty} \phi(z^{(\nu)} - z) = 0.$$

Ορισμός ΙΙΙ.1.1.8. ***Η ακολουθία*** $(z^{(\nu)})$ ***λέγεται ότι είναι τάξης*** $r > 0$ **(ως προς την νόρμα** ϕ **), εάν υπάρχουν δύο θετικές σταθερές** A ***και*** B ***, τέτοιες ώστε :***

$$0 < A \le \frac{\phi(z^{(\nu+1)} - z)}{[\phi(\mathrm{z}^{(\nu)} - z)]^r} \le B < +\infty,$$

για κάθε $\nu = 1,2,\ldots$ ***Εάν η ακολουθία αυτή κατασκευάζεται από μία επαναληπτική μέθοδο, λέμε ότι η μέθοδος αυτή είναι τάξης r*** **(ως προς την νόρμα** ϕ **). ■**

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός της τάξης μίας ακολουθίας του K^n είναι ανεξάρτητος από τον τρόπο που δημιουργούνται ή κατασκευάζονται οι όροι της ακολουθίας.

Έτσι, εάν η ακολουθία παράγεται μέσα από μία επαναληπτική διαδικασία της μορφής:

$$\xi^{(\nu+1)} = F(\xi^{(\nu)}),$$

όπου η απεικόνιση F είναι διαφορίσιμη, με την έννοια του *Ορισμού ΙΙΙ.1.1.4*, στην περιοχή του σταθερού σημείου z της F, τότε συμβαίνει :

$$\xi^{(v+1)} = F(\xi + \xi^{(v)} - \xi) = F(\xi) + (d_\xi F)(\xi^{(v)} - \xi) + o(\xi, \xi^{(v)} - \xi)$$

ή ακόμα :

$$\xi^{(v+1)} - \xi = (d_\xi F)(\xi^{(v)} - \xi) + o(\xi, \xi^{(v)} - \xi).$$

Επομένως, όταν:

$$\|d_\xi F\| := \sup_{h \neq 0} \frac{\|(d_\xi F)(h)\|}{\|h\|} < 1,$$

η ακολουθία $(\xi^{(v+1)})$ είναι τουλάχιστον τάξης 1 (ως προς την Ευκλείδεια νόρμα), ενώ όταν:

$$\|d_\xi F\| = 0,$$

η ακολουθία $(\xi^{(v+1)})$ είναι τουλάχιστον τάξης 2 (ως προς την Ευκλείδεια νόρμα).

Με τα ίδια επιχειρήματα μπορούμε, εξ άλλου, να δείξουμε το επόμενο αποτέλεσμα :

Πρόταση ΙΙΙ.1.1.9. ***Εάν η F είναι μία απεικόνιση του $\mathbb{R}$ μέσα στον εαυτό του και εάν η F έχει παραγώγους μέχρι και $p-$ τάξης στο σταθερό της σημείο ξ τέτοιες ώστε:***

$$F'(\xi) = F''(\xi) = \ldots = F^{(p-1)}(\xi) = 0 \text{ και } F^{(p)}(\xi) \neq 0,$$

τότε η ακολουθία $(\xi^{(v)})$ ή η επαναληπτική μέθοδος είναι τάξης p (ως προς την κλασσική Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}$). ■

Παρατηρήσεις ΙΙΙ.1.1.10. (i). Στην προηγούμενη *Πρόταση*, η τάξη της ακολουθίας $(\xi^{(v)})$ είναι ένας φυσικός αριθμός, ενώ στον *Ορισμό ΙΙΙ.1.1.8*, είδαμε ότι γενικά η τάξη μίας ακολουθίας (εφ' όσον υπάρχει) είναι πραγματικός αριθμός.

(ii). Εάν η ακολουθία $(\xi^{(v)})$ είναι τάξης r και αν το όριο:

$$C = \lim_{v\to\infty} \frac{\phi(\xi^{(v+1)} - \xi)}{[\phi(\xi^{(v)} - \xi)]^r}$$

υπάρχει, τότε:

$$C \neq 0, +\infty .$$

Ο πραγματικός αριθμός C ονομάζεται τότε ***ασυμπτωτική σταθερά του σφάλματος*** (ως προς την νόρμα ϕ του K^n). ■

Ας περάσουμε τώρα στην μελέτη της "σύγκρισης" των ταχυτήτων σύγκλισης δύο ακολουθιών. Κατ' αρχήν έχουμε τον επόμενο βασικό *Ορισμό*:

Ορισμός ΙΙΙ.1.1.11.. ***Έστωσαν*** $(z^{(v)})$ ***και*** $(w^{(v)})$ ***δύο ακολουθίες σημείων του*** K^n***, και*** $z \in K^n, w \in K^n$, ***τέτοια ώστε:***

$$\lim_{v\to\infty} \phi(z^{(v)} - z) = 0 \text{ και } \lim_{v\to\infty} \psi(w^{(v)} - w) = 0$$

όπου ϕ ***και*** ψ ***είναι δύο νόρμες του*** K^n***. Λέμε ότι η ακολουθία*** $(z^{(v)})$ ***συγκλίνει πιο γρήγορα από την ακολουθία*** $(w^{(v)})$***, εάν:***

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\phi(z^{(v)} - z)}{\psi(w^{(v)} - \xi)} = 0. \ ■$$

Το *Θεώρημα* που ακολουθεί είναι διαφωτιστικό και ιδιαίτερα χρήσιμο στην πράξη :

Θεώρημα ΙΙΙ.1.1.12.*.** ***Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(z^{(v)} \in K^n)$ ***είναι τάξης*** r **(ως προς την νόρμα** ϕ **του** K^n**)** ***ότι η ακολουθία*** $(w^{(v)} \in K^n)$ ***είναι τάξης*** p ***(ως προς την νόρμα*** ψ ***του*** K^n***). Εάν*** $r > p$***, τότε η ακολουθία*** $(z^{(v)})$ ***συγκλίνει πιο γρήγορα από την ακολουθία*** $(w^{(v)})$**.**

Απόδειξη. Έστω ότι

$$\lim_{v\to\infty} \phi(z^{(v)} - z) = 0 \text{ και } \lim_{v\to\infty} \psi(w^{(v)} - w) = 0.$$

Από την υπόθεση του *Θεωρήματος*, υπάρχουν δύο σταθερές $B > 0$ και $D > 0$ τέτοιες ώστε:

$$\phi(z^{(v+1)} - z) \le B \cdot [\phi(z^{(v)} - z)]^r \text{ και } [\psi(w^{(v)} - w)]^p \le D \cdot \psi(w^{(v+1)} - w),$$

για όλα τα *v* που είναι αρκετά μεγάλα.

Αν υποθέσουμε πως για όλα αυτά τα v ισχύει ότι $\psi(w^{(v)} - w) \le M \cdot \phi(z^{(v)} - z)$ και ταυτόχρονα ότι $\phi(z^{(v)} - z) \le N \cdot \psi(w^{(v)} - w)$, τότε:

$$\psi\left(w^{(v+1)} - w\right) \le M\ \phi\left(z^{(v+1)} - z\right) \le M\ B\left[\phi\left(z^{(v)} - z\right)\right]^r \le M\ B\ N^r\ \left[\psi\left(w^{(v)} - w\right)\right]^r,$$

και συνεπώς:

$$[\psi(w^{(v)} - w)]^p \le D\ \psi(w^{(v+1)} - w) \le D\ M\ B.\ N^r\ [\psi(w^{(v)} - w)]^r$$

που είναι αδύνατο, γιατί $p < r$.

Επομένως, θα είναι:

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\psi(w^{(v)} - w)}{\phi(z^{(v)} - z)} = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{v\to\infty} \frac{\phi(z^{(v)} - z)}{\psi(w^{(v)} - w)} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απαγωγής στο άτοπο, ας δεχθούμε ότι:

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\psi(w^{(v)} - w)}{\phi(z^{(v)} - z)} = 0 .$$

Τότε, θα είχαμε και:

$$\lim_{v\to\infty} \frac{[\psi(w^{(v)} - w)]^{p^{\kappa}}}{[\phi(z^{(v)} - z)]^{r^{\kappa}}} = 0$$

για κάθε $\kappa > 0,$ που είναι προφανώς άτοπο, γιατί $p < r.$ Άρα, συμπεραίνουμε ότι :

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\phi(z^{(v)} - z)}{\psi(w^{(v)} - w)} = 0,$$

Το συμπέρασμα αυτό ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

Οι έννοιες της τάξης μίας ακολουθίας σημείων του $\boldsymbol{K}^n$ και της ασυμπτωτικής σταθεράς του σφάλματος δεν είναι δύο καθαρά θεωρητικές έννοιες και μόνον. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(z^{(v)} \in \boldsymbol{K}^n)$ συγκλίνει στο σημείο $z \in \boldsymbol{K}^n$ έχοντας τάξη r, ως προς την Ευκλείδεια νόρμα του $\boldsymbol{K}^n$.

Τότε, για κάθε v αρκετά μεγάλο, μπορούμε να γράφουμε ότι:

$$\left\| z^{(v+1)} - z \right\| \cong C \left\| z^{(v)} - z \right\|^r ,$$

όπου C είναι η ασυμπτωτική σταθερά του σφάλματος.

Μάλιστα, επειδή οι θετικές ποσότητες $\left\| z^{(v)} - z \right\|$ αναπαριστούν τα απόλυτα σφάλματα, οι αριθμοί $\sigma_v = -\log_{10} \left\| z^{(v)} - z \right\|$ θ' αναπαριστούν τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης $z^{(v)}$ που ταυτίζονται με αυτά του ορίου *z*. Έτσι, θέτοντας $R = -\log_{10} C,$ έχουμε:

$$\sigma_{v+1} = r\, \sigma_v + R$$

για κάποιο $r > 0.$

Εάν $r=1$, βλέπουμε ότι μία επανάληψη της μεθόδου προσθέτει R νέα δεκαδικά ψηφία στην ακρίβεια της προσέγγισης. (Ενδεικτικά, αναφέρουμε, πως όταν $C=0{,}999$, απαιτούνται 2500 επαναλήψεις για το κέρδος της ακρίβειας ενός μόνου ψηφίου).

Εάν πάλι $r>1$, βλέπουμε ότι κατά το πέρασμα από την προσέγγιση $z^{(\nu)}$ στην προσέγγιση $z^{(\nu+1)}$ ο αριθμός των κοινών δεκαδικών ψηφίων της προσέγγισης και του ορίου πολλαπλασιάζεται με r.

Αυτή η τελευταία παρατήρηση, μαζί με το *Θεώρημα ΙΙΙ.1.1.12*, καταμαρτυρά το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν οι μέθοδοι που έχουν τάξη μεγαλύτερη από 1.

Και όμως, στην πράξη, όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη της μεθόδου τόσο η εργασία που απαιτείται για την ολοκλήρωση μίας επανάληψης διογκώνεται.

Παρατήρηση ΙΙΙ.1.1.13. Στην συνέχεια, αντί να χρησιμοποιούμε τους όρους "σύγκλιση τάξης 1", και"σύγκλιση τάξης 2", θα προτιμούμε την ορολογία "***γραμμική σύγκλιση***" και "***τετραγωνική σύγκλιση***", αντιστοίχως. ■

ΙΙΙ.1.2. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Σ' αυτήν την *Παράγραφο* θα μελετήσουμε έναν ορισμένο αριθμό μεθόδων επίλυσης μίας εξίσωσης:

$$F(\xi)=\xi,$$

όπου F είναι μία απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στον εαυτό του.

Στη συνέχεια, θα λέμε ότι ***η συνάρτηση*** F ***είναι*** κ ***φορές συνεχώς διαφορίσιμη σ' ένα (ανοικτό) σύνολο***, εάν οι παράγωγοι:

$$F', F'', F''', \ldots, F^{(\kappa)}$$

της F υπάρχουν και είναι συνεχείς μέσα σ' αυτό το σύνολο $(\kappa = 1,2,\ldots,)$.

Εάν η F είναι κ–φορές συνεχώς διαφορίσιμη μέσα σε (ανοικτό) σύνολο για κάθε $\kappa \geq 1$, θα λέμε ότι ***η συνάρτηση*** F ***είναι λεία*** *στο σύνολο αυτό*.

III.1.2.(i). Η Μέθοδος Newton Ας γράψουμε την προς επίλυση εξίσωση υπό την μορφή:

$$f(\xi) = 0,$$

και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι μία φορά συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}$. Τότε:

$$f(\xi_{\nu+1}) = f(\xi_\nu + \xi_{\nu+1} - \xi_\nu) = f(\xi_\nu) + f'(\xi_\nu)\,(\xi_{\nu+1} - \xi_\nu) + o(\xi_{\nu+1} - \xi_\nu),$$

όπου η συνάρτηση $o(h)$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0}[o(h)/h] = 0$.

Επιλέγουμε το $x_{\nu+1}$ με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$f(\xi_{\nu+1}) = o(\xi_{\nu+1} - \xi).$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\xi_{\nu+1}$ αρκεί να επιλεγεί έτσι ώστε :

$$0 = f(\xi_\nu) + f'(\xi_\nu)\,(\xi_{\nu+1} - \xi_\nu).$$

Ο *Τύπος* αυτός δίνει την ***επαναληπτική μέθοδο Newton***:

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu - \frac{f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)} \qquad (\nu = 0,1,2,...),$$

για κάποιο δεδομένο πρώτο σημείο αφετηρίας της μεθόδου, έστω ξ_0, ***και κάτω από την προϋπόθεση ότι***

$$f'(\xi_\nu) \neq 0.$$

Βλέπουμε αμέσως εάν $\lim_{\nu\to\infty} \xi_\nu = \xi$ τότε από την συνέχεια των συναρτήσεων f και f', έπεται ότι $\xi = \xi - [f(\xi)/f'(\xi)]$ και επομένως:

$$f(\xi) = 0 \quad \text{εάν} \quad f'(\xi) \neq 0.$$

Ας εξετάσουμε την τάξη σύγκλισης αυτής της μεθόδου :

Θεώρημα III.1.2.(i).1. ***Εάν το*** ξ ***είναι μία απλή ρίζα της δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης*** f ***και αν*** $f'(\xi) \neq 0$, ***τότε υπάρχει περιοχή του*** ξ ***τέτοια ώστε για κάθε σημείο*** ξ_0, ***που ανήκει σ' αυτήν την περιοχή, η ακολουθία*** $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, ...)$ ***που παράγεται από την μέθοδο Newton να συγκλίνει προς το σημείο*** ξ ***και να είναι τάξης τουλάχιστον*** 2 **(ως προς την συνηθισμένη νόρμα** $|\cdots|$ **του** $\mathbb{R}$ **).**

Απόδειξη. Προφανώς η μέθοδος Newton είναι της μορφής :

$$\xi_{\nu+1} = F(\xi_\nu),$$

με:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Άρα:

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x) - f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

και συνεπώς:

$$F'(\xi) = 0\text{, εάν } f'(\xi) = 0 \text{ και } f(\xi) = 0.$$

Επειδή έχει υποτεθεί ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, η f' θα είναι συνεχής συνάρτηση.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία περιοχή του ξ μέσα στην οποία ισχύει

$$\left\| d_\xi F \right\| = \left| F'(\xi) \right| \le L < 1.$$

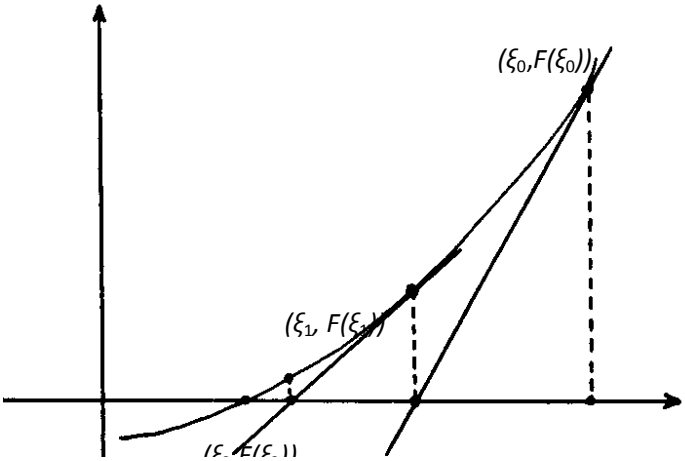
Μία εφαρμογή του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.1.6* μπορεί να επιβεβαιώσει ότι για κάθε σημείο του ξ_0, που ανήκει σ' αυτήν την περιοχή, η επαναληπτική ακολουθία:

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu),$$

με αρχικό σημείο ξ_0, συγκλίνει προς το ξ.

Εξάλλου, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που ακολούθησαν τον *Ορισμό ΙΙΙ.1.1.11*, το γεγονός ότι $\left\| d_\xi F \right\| = \left| F'(\xi) \right| = 0$ εγγυάται ότι η επαναληπτική ακολουθία $(\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots)$ έχει τάξη τουλάχιστον ίση με 2. ■

Η ***γεωμετρική αναπαράσταση*** της μεθόδου Newton συνίσταται στην λήψη των σημείων $\xi_{\nu+1}$ σαν τις αντίστοιχες τομές του οριζόντιου άξονα των *x* με τις ευθείες που εφάπτονται στο γράφημα της *F* στα σημεία $(\xi_\nu, F(\xi_\nu))$:



Εάν το σημείο ξ είναι μία ρίζα τάξης p της f, μπορούμε να διασκευάσουμε κατάλληλα την μέθοδο Newton και να οδηγηθούμε πάλι σε μία επαναληπτική μέθοδο που έχει τάξη τουλάχιστον 2.

Πράγματι, σε μία τέτοια περίπτωση, το σημείο ξ θα είναι απλή ρίζα της συνάρτησης $f^{1/p}$ (εφ' όσον, φυσικά, η τελευταία ορίζεται στο ξ) και τότε, εφαρμόζοντας την μέθοδο Newton, σχηματίζουμε την νέα επαναληπτική διαδικασία :

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu - p.\frac{f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)} \quad (\nu = 0,1,2,...).$$

Εν τούτοις, στην πράξη συμβαίνει πολύ σπάνια να γνωρίζουμε την τάξη p της f στο σημείο ξ (χωρίς να γνωρίζουμε το σημείο ξ).

Γενικά, η μέθοδος Newton συγκλίνει γρήγορα, αλλά παρουσιάζει δύο μειονεκτήματα: το πρώτο εντοπίζεται στο πώς και πόσο κοντά στην άγνωστη ρίζα ξ πρέπει να διαλέξουμε το σημείο εκκίνησης της μεθόδου, δηλαδή το σημείο ξ_0, ενώ το δεύτερο έγκειται στην ανάγκη των με ακρίβεια υπολογισμών των ποσοτήτων $f'(\xi_\nu)$. Προτού προχωρήσουμε στους τρόπους αντιμετώπισης αυτών των δύο μειονεκτημάτων, θα κάνουμε δύο επισημάνσεις.

Κατ' αρχήν, μία σπουδαία εφαρμογή της μεθόδου Newton είναι *ο υπολογισμός της* $r-$*οστής ρίζας ενός πραγματικού αριθμού* A. Πράγματι, αυτός ο υπολογισμός ισοδυναμεί με την επίλυση της εξίσωσης $f(\xi)=\xi^r-\mathrm{A}=0$. Με την μέθοδο Newton καταλήγουμε στον αλγόριθμο:

$$\xi_{\nu+1}=\frac{1}{r}\left[(r-1)\,\xi_\nu+\frac{\mathrm{A}}{\xi_\nu^{r-1}}\right]\qquad (\ r>1,\nu=0,1,2,\ldots\ ).$$

Ειδικότερα, *για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού* A, *βρίσκουμε*:

$$\xi_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left[\ \xi_\nu+\frac{\mathrm{A}}{\xi_\nu^{r-1}}\right]\qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Τέλος, σε αρκετά βιβλία η μέθοδος Newton ονομάζεται ***μέθοδος Newton-Raphson***.

III.1.2.(ii). Οι Μέθοδοι της Τέμνουσας και της Διχοτόμησης Στην συνέχεια, θα εξετάσουμε τους τρόπους αντιμετώπισης των δύο βασικών μειονεκτημάτων της μεθόδου Newton.

Η επαναληπτική ***μέθοδος της τέμνουσας***, που είναι γνωστή και σαν ***μέθοδος regula falsi*** (: μέθοδος της εσφαλμένης θέσης), αντικαθιστά την τιμή της $f'(\xi_\nu)$ στον βασικό τύπο της μεθόδου Newton με το πηλίκον :

$$\frac{f(\xi_\nu)-f(\xi_{\nu-1})}{\xi_\nu-\xi_{\nu-1}},$$

έτσι ώστε να προκύπτει ο αλγόριθμος:

$$\xi_{\nu+1}=\frac{\xi_{\nu-1}.f(\xi_\nu)-\xi_\nu.f(\xi_{\nu-1})}{f(\xi_\nu)-f(\xi_{\nu-1})}\qquad(\nu=0,1,2,\ldots).$$

Παρατηρούμε ότι η λειτουργία ενός τέτοιου αλγορίθμου προϋποθέτει το δεδομένο δύο αρχικών τιμών ξ_0 και ξ_1. Επί πλέον, αυτή η μέθοδος δεν είναι της μορφής $\xi_{\nu+1}=F(\xi_\nu)$, αλλά της μορφής $\xi_{\nu+1}=G(\xi_\nu,\xi_{\nu-1})$.

Η εξέταση της τάξης της μεθόδου της τέμνουσας οργανώνεται σύμφωνα με κάποια επιχειρήματα που είναι διαφορετικά από εκείνα που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως.

Συγκεκριμένα, έχουμε το:

Θεώρημα III.1.2.(ii).1. ***Εάν η συνάρτηση f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη στην περιοχή μίας απλής ρίζας ξ της f και αν $f'(\xi)\neq 0$ τότε υπάρχει περιοχή του ξ τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος (ξ_0,ξ_1) σημείων που ανήκουν σ' αυτήν την περιοχή, με $\xi_0\neq\xi_1$, η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει προς το ξ και έχει τάξη που είναι τουλάχιστον ίση με:***

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(ως προς την συνηθισμένη νόρμα $|\cdots|$ | .|του $\mathbb{R}$).**

Απόδειξη. Θέτουμε $\sigma_\nu := \xi_\nu - \xi$. Τότε:

$$\sigma_{\nu+1} = \frac{\sigma_{\nu-1}\, f(\xi_\nu) - \sigma_\nu\, f(\xi_{\nu-1})}{f(\xi_\nu) - f(\xi_{\nu-1})}.$$

Εάν η f είναι δύο φορές (συνεχώς) διαφορίσιμη σε μία περιοχή

$$V_\xi =]\xi - \delta, \xi + \delta[\text{ του } \xi,$$

τότε είναι:

$$f(\xi_\nu) = f'(\xi)\,(\xi_\nu - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(\xi_\nu - \xi)^2 + o(|\xi_\nu - \xi|^2)$$

και:

$$f(\xi_{\nu-1}) = f'(\xi)\,(\xi_{\nu-1} - \xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(\xi_{\nu-1} - \xi)^2 + o(|\xi_{\nu-1} - \xi|^2),$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\xi_\nu \in V_\xi$ και $\xi_{\nu-1} \in V_\xi$.

Επομένως, έχουμε:

$$\sigma_{\nu+1} = \frac{1}{\left\{(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) f'(\xi) + \left(\frac{\sigma_\nu^2 - \sigma_{\nu-1}^2}{2}\right) f''(\xi) + o\left(|\sigma_\nu|^2\right) + o\left(|\sigma_{\nu-1}|^2\right)\right\}}$$

$$\times \left\{\sigma_{\nu-1}\left[f'(\xi)\sigma_\nu + \frac{f''(\xi)}{2}\sigma_\nu^2 + o\left(|\sigma_\nu|^2\right)\right]\right.$$

$$\left. - \sigma_\nu\left[f'(\xi)\sigma_{\nu-1} + \frac{f''(\xi)}{2}\sigma_{\nu-1}^2 + o\left(|\sigma_{\nu-1}|^2\right)\right]\right\},$$

ή, διατηρώντας μόνον τους ενισχυμένους όρους:

$$\sigma_{\nu-1} \approx \sigma_\nu \, \sigma_{\nu-1} \frac{f''(\xi)}{2\, f'(\xi)},$$

πάντα κάτω από την προϋπόθεση ότι $\xi_\nu \in V_\xi$ και $\xi_{\nu-1} \in V_\xi$ $(\nu = 1,2,\ldots)$.

Η προϋπόθεση αυτή εξασφαλίζεται όταν τα αρχικά σημεία ξ_0 και ξ_1 επιλεγούν έτσι ώστε:

$$|\sigma_0| = |\xi_0 - \xi| < \frac{\varepsilon}{\sup_{x\in\overline{W}_\xi}\left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|} < \delta \text{ και } |\sigma_1| = |\xi_1 - \xi| < \frac{\varepsilon}{\sup_{x\in\overline{W}_\xi}\left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|} < \delta,$$

όπου $\varepsilon < 1$ και $\overline{W_\xi}$ είναι μία κλειστή περιοχή του ξ με $\overline{W_\xi} \subset V_\xi$, γιατί τότε θα είναι:

$$|\xi_\nu - \xi| < \delta \Leftrightarrow \xi_\nu \in V_\xi \quad \forall \nu = 1,2,\ldots \text{ και } \lim_{\nu\to\infty}|\sigma_\nu| = \lim_{\nu\to\infty}|\xi_\nu - \xi| = 0,$$

που, άλλωστε, εξασφαλίζει την σύγκλιση της μεθόδου προς το σημείο ξ.

Εάν τώρα συμβολίσουμε με r την τάξη της μεθόδου, τότε θα είναι:

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|\sigma_{\nu+1}|}{|\sigma_\nu|^r} = C\,(\neq 0 \text{ ή } +\infty),$$

απ' όπου θα προκύψει ότι

$$\sigma_{\nu+1} \cong C\,\sigma_\nu^r \quad \text{και} \quad \sigma_{\nu+1} \cong C\,\sigma_{\nu-1}^{r^2},$$

κι εφ' όσον, όπως είδαμε, ισχύει:

$$\sigma_{\nu+1} \cong K\ \sigma_{\nu}\ \sigma_{\nu-1} \qquad (\text{με } K = \frac{f''(\xi)}{2\ f'(\xi)}),$$

θα οδηγηθούμε στην προσεγγιστική σχέση :

$$\frac{C^r}{K}\ \sigma_{\nu-1}^{r^2-r-1} \cong 1.$$

Η τελευταία αυτή σχέση αληθεύει για κάθε συνάρτηση f (που υπακούει στις υποθέσεις του *Θεωρήματος*) και συνεπώς για κάθε τιμή του K.

Έτσι, ιδιαιτέρως για $K = C^r$, θα πρέπει το r να είναι λύση της εξίσωσης

$$r^2 - r - 1 = 0, \text{ με } r > 0,$$

δηλαδή θα πρέπει:

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

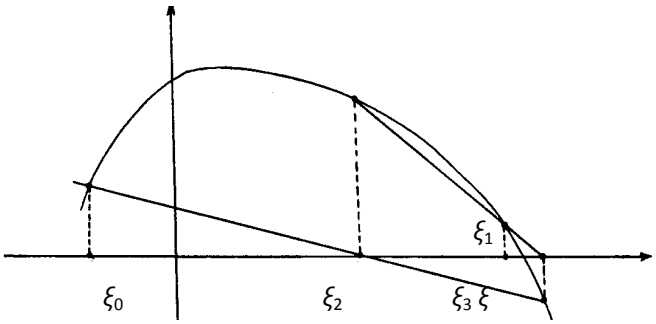
Η απόδειξη του *Θεωρήματος* ολοκληρώθηκε. ■

Αν και η τάξη της μεθόδου της τέμνουσας είναι μικρότερη από αυτήν της μεθόδου Newton, η μέθοδος της τέμνουσας υπερέχει αριθμητικά. Αυτό εξηγείται εύκολα.

Στην μέθοδο Newton για την ολοκλήρωση μίας επανάληψης απαιτούνται δύο υπολογισμοί τιμών συναρτήσεων: αυτός της $f(\xi_\nu)$ και αυτός της $f'(\xi_\nu)$. Από την άλλη πλευρά, μετά την ολοκλήρωση μίας επανάληψης, ο αριθμός των αξιοσημείωτων ψηφίων, που συμπίπτουν με αυτά της αληθινής λύσης ξ, θα έχει πολλαπλασιασθεί επί δύο.

Στην μέθοδο της τέμνουσας, για την ολοκλήρωση μίας επανάληψης, δεν είναι απαραίτητος παρά μόνον ένας υπολογισμός : αυτός της τιμής $f(\xi_v)$ (επειδή ο υπολογισμός της τιμής $f(\xi_{v-1})$ έχει ήδη πραγματοποιηθεί κατά το στάδιο της προηγούμενης επανάληψης), ενώ ταυτόχρονα ο αριθμός των αξιοσημείωτων ψηφίων που συμπίπτουν με αυτά της αληθινής λύσης *ξ*, θα έχει πολλαπλασιασθεί επί $(1{,}618...)^2$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της τέμνουσας περιγράφεται στο επόμενο σχήμα:



Όπως ήδη έχει αναφερθεί, το άλλο μειονέκτημα της μεθόδου Newton (που είναι και μειονέκτημα της μεθόδου της τέμνουσας) είναι η άγνοια κριτηρίων επιλογής του σημείου ξ_0 εκκίνησης της μεθόδου, έτσι ώστε η εφαρμογή του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.2.(i).1* (αντίστοιχα, του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.2.(ii).1*) να εξασφαλίζει την σύγκλιση της παραγόμενης από το ξ_0 επαναληπτικής ακολουθίας προς την άγνωστη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(\xi)=0$. Το μειονέκτημα αυτό αντιμετωπίζεται με τον εντοπισμό ενός αρχικού σημείου ξ_0 με την βοήθεια της μεθόδου της διχοτόμησης.

Η ***μέθοδος της διχοτόμησης***, που είναι γνωστή και σαν ***μέθοδος Bolzano***, διαιρεί ένα διάστημα $[a,\beta]$ που περιέχεται μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f που συμμετέχει στην εξίσωση, λαμβάνοντας κάθε φορά εκείνο το υποδιάστημα στο οποίο ανήκει η ρίζα.

Για την εφαρμογή της μεθόδου της διχοτόμησης, καταρχήν, υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και ότι:

$$f(a)\,f(\beta)<0,$$

δηλαδή ότι μέσα στο $[a,\beta]$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(\xi)=0$. Τότε, υπολογίζουμε το μέσο του διαστήματος $[a,\beta]$:

$$c_0=\frac{a_0+\beta_0}{2},$$

όπου $a_0=a$ και $\beta_0=\beta$.

Αν $f(c_0)=0$, τότε $\xi=c_0$, διαφορετικά ελέγχουμε την συνθήκη

$$f(a_0)\,f(c_0)<0.$$

Αν αυτή ισχύει, τότε η ρίζα ξ βρίσκεται στο διάστημα $[a_0,c_0]$, και προκειμένου να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία τίθεται

$$a_1=a_0 \text{ και } \beta_1=c_0$$

οπότε προκύπτει το νέο διάστημα $[a_1,\beta_1]$ που είναι το μισό του αρχικού.

Αν

$$f(a_0)\,f(c_0)>0$$

τότε $f(c_0)\,f(\beta_0)<0$, που σημαίνει ότι η ξ βρίσκεται στο διάστημα $[c_0,\beta_0]$, οπότε το νέο διάστημα θα είναι το

$$[a_1,\beta_1],$$

όπου τώρα

$$a_1=c_0 \text{ και } \beta_1=\beta_0.$$

Έτσι ή αλλιώς, το νέο διάστημα $[a_1,\beta_1]$, που θα προκύψει, περιέχει την ρίζα ξ της $f(x)$ και η όλη διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί.

Δημιουργούμε κατ' αυτόν τον τρόπο μία ακολουθία διαστημάτων $[a_0,\beta_0],[a_1,\beta_1],\ldots,[a_\nu,\beta_\nu],\ldots$ για τα οποία ισχύουν οι ανισότητες:

$$a_0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_\nu\le\ldots\beta_0 \quad \text{και} \quad \beta_0\ge\beta_1\ge\beta_2\ge\ldots\ge\beta_\nu\ge\ldots\ge a_0,$$

με:

$$f(a_\nu)\,f(\beta_\nu)\le 0 \quad \text{και} \quad \beta_{\nu+1}-a_{\nu+1}=\frac{\beta_\nu-a_\nu}{2}=\frac{\beta_0-a_0}{2^{\nu+1}} \quad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Είναι φανερό πως, επειδή

$$\lim_{\nu\to\infty}\beta_{\nu+1}-\lim_{\nu\to\infty}a_{\nu+1}=\lim_{\nu\to\infty}(\beta_{\nu+1}-a_{\nu+1})=\lim_{\nu\to\infty}2^{-(\nu+1)}(\beta_0-a_0)=0,$$

εάν τεθεί

$$\xi=\lim_{\nu\to\infty}\beta_{\nu+1}=\lim_{\nu\to\infty}a_{\nu+1},$$

τότε, παίρνοντας τα όρια στην ανισοτική σχέση

$$f(a_\nu)\,f(\beta_\nu)\le 0,$$

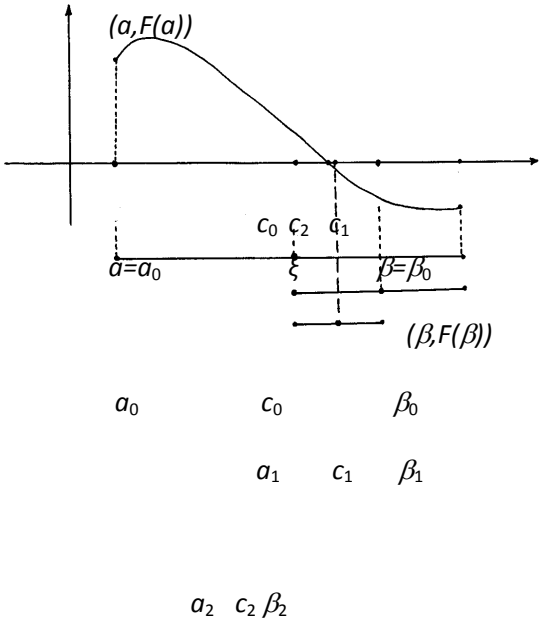
θα προκύψει, λόγω της συνέχειας της f, ότι $[f(\xi)]^2\le 0$, άρα $f(\xi)=0$, δηλαδή ότι τα άκρα των διαστημάτων $[a_\nu,\beta_\nu]$ συγκλίνουν στην ρίζα ξ της f.

Έτσι, από τη στιγμή που βρεθούν τα a και β, έτσι ώστε $f(a)\,f(\beta)<0$, η μέθοδος συγκλίνει οπωσδήποτε σε μία ρίζα $\xi \in [a,\beta]$ της συνεχούς συνάρτησης f, υπό την έννοια ότι τα μέσα

$$c_\nu = \frac{a_\nu + \beta_\nu}{2}$$

των διαστημάτων $[a_\nu, \beta_\nu]$ συγκλίνουν προς το ξ.

Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου της διχοτόμησης αποδίδεται από το ακόλουθο σχήμα:



Ένα μειονέκτημα της μεθόδου της διχοτόμησης είναι ότι απαιτείται η συνάρτηση $f(x)$ να αλλάζει πρόσημο γύρω από την ρίζα, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να υπολογίσει ρίζες άρτιας πολλαπλότητας.

Ακόμη, από την κατασκευή της μεθόδου έπεται ότι η μέθοδος της διχοτόμησης εντοπίζει μόνο μία ρίζα και όχι όλες τις ρίζες που βρίσκονται στο διάστημα $[a_\nu, \beta_\nu]$.

Όμως, το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι το σφάλμα $|\xi - c_\nu|$ σε κάθε επανάληψη μπορεί να φθάνει ακόμα και την διαφορά

$$\frac{\beta - a}{2^{\nu+1}},$$

δηλαδή μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο συγκρινόμενο με άλλες μεθόδους, πράγμα που σημαίνει ότι η μέθοδος έχει γενικά αργή σύγκλιση.

Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται συνήθως αρχικά για τον εντοπισμό μίας περιοχής μίας απλής ρίζας (τόσο μικρής ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.2.(i).1* ή οι υποθέσεις του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.2(ii).1*), και στην συνέχεια εφαρμόζεται μία άλλη μέθοδος με γρηγορότερη ταχύτητα σύγκλισης.

Τα κριτήρια διακοπής της μεθόδου της διχοτόμησης είναι τρία :

Στο πρώτο κριτήριο ελέγχεται εάν $|f(c_\nu)| < \delta$, όπου δ είναι μία ανεκτικότητα της μορφής

$$\frac{1}{2}10^{-\kappa}.$$

Στο δεύτερο κριτήριο διακοπής ελέγχεται εάν $|c_\nu - \xi| < \varepsilon$, όπου ε είναι μία αυθαίρετα μικρή ανεκτικότητα: επειδή

$$|c_\nu - \xi| \le \frac{\beta - a}{2^{\nu+1}},$$

αρκεί η μέθοδος να διακοπεί κατά την v –οστή επανάληψη, όπου v είναι ο πιο μικρός φυσικός αριθμός που είναι τέτοιος ώστε:

$$\frac{\beta - a}{2^{v+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow v \geq \left[\frac{\ell n(\beta - a) - \ell n(2\,\varepsilon)}{\ell n 2} \right].$$

Στην πράξη, αντί του κριτηρίου:

$$|c_v - \xi| < \varepsilon \quad \left(\Leftarrow v \geq \left[\frac{\ell n(\beta - a) - \ell n(2.\varepsilon)}{\ell n 2} \right] \right),$$

χρησιμοποιείται το ακόλουθο κριτήριο διακοπής:

$$|c_{v+1} - c_v| < \varepsilon \quad \text{ή} \quad \frac{|c_{v+1} - c_v|}{|c_{v+1}|} = \left| 1 - \frac{c_v}{c_{v+1}} \right| < \varepsilon \qquad (\text{με } c_{v+1} \neq 0).$$

(Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι, από την άλλη πλευρά, στην πράξη οι τιμές των ανεκτικοτήτων δ και ε δεν πρέπει να είναι σημαντικά μικρές, δηλαδή, εάν κ είναι το μέγιστο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που μπορούν να αποθηκευτούν σε μία υπολογιστική μηχανή, τότε θα πρέπει $\delta, \varepsilon \geq \frac{1}{2} 10^{-\kappa+2}$).

III.1.2.(iii). Οι Μέθοδοι Δ^2 του Aitken και του Steffensen

Ας θεωρήσουμε μία επαναληπτική μέθοδο:

$$\xi_{v+1} = F(\xi_v)$$

που είναι τάξης 1.

Στην *Παράγραφο ΙΙΙ.1.1,* είδαμε πόσο η σύγκλιση μίας τέτοιας μεθόδου μπορεί να είναι αργή.

Η ***μέθοδος*** Δ^2 , που οφείλεται στον ***Aitken***, αποσκοπεί στην επιτάχυνση της σύγκλισης μίας τέτοιας ακολουθίας.

Η εφαρμογή της μεθόδου Δ^2 του Aitken πρέπει προφανώς να είναι ανεξάρτητη του τρόπου με τον οποίο παράγεται η ακολουθία με γενικό όρο ξ_ν.

Εν τούτοις, στα πλαίσια της υπό ανάπτυξη *Παραγράφου*, θα την εφαρμόσουμε σε μία επαναληπτική διαδικασία της μορφής $\xi_{\nu+1} = F(\xi_\nu)$, όπου η συνάρτηση F είναι διαφορίσιμη στην περιοχή ενός σταθερού της σημείου ξ. Τότε, θα ισχύει:

$$\xi_{\nu+1} - \xi = (\mathrm{a} + \varepsilon_\nu).(\xi_\nu - \xi),$$

όπου $\mathrm{a} = F'(\xi)$ και $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0$.

Εάν υποθέσουμε ότι $\varepsilon_\nu = 0$ για κάθε ν, μπορούμε να γράψουμε

$$\xi_{\nu+1} - \xi = \mathrm{a}\,(\xi_\nu - \xi) \text{ και } \xi_{\nu+2} - \xi = \mathrm{a}\,(\xi_{\nu+1} - \xi),$$

απ' όπου έπεται $\mathrm{a} = [\Delta\xi_{\nu+1} / \Delta\xi_\nu]$ και:

$$\xi = \frac{\xi_{\nu+1} - \mathrm{a}\,\xi_\nu}{1 - \mathrm{a}} = \frac{\xi_{\nu+2}\,\xi_\nu - \xi_{\nu+1}^2}{\xi_{\nu+2} - 2\,\xi_{\nu+1} + \xi_n} \quad \text{(για κάθε } \nu\text{)}.$$

Εάν όμως το ε_ν δεν είναι ίσο με μηδέν για κάθε ν, η τελευταία έκφραση δεν ισούται με ξ, για κάθε ν, αλλά με μία ποσότητα που θα συμβολίζουμε με y_ν:

$$y_\nu = \frac{\xi_{\nu+1}.\xi_\nu - \xi_{\nu+1}^2}{\xi_{\nu+2} - 2\,\xi_{\nu+1} + \xi_\nu} = \xi_\nu - \frac{\Delta(\xi_\nu)^2}{\Delta^2\xi_\nu} \quad (\nu = 0,1,2,\ldots).$$

Αυτός ο μετασχηματισμός της ακολουθίας $(\xi_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ στην ακολουθία $(y_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ είναι ***η μέθοδος Δ^2 του Aitken***. Η ονομασία της μεθόδου προέρχεται από το γεγονός ότι ο παρανομαστής της ποσότητας y_ν είναι ίσος με $\Delta^2\xi_\nu$.

Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε τα σύμβολα $\Delta\xi_\nu$ και $\Delta^2\xi_\nu$. Σε αργότερη *Παράγραφο*, θα εισάγουμε σύμβολα της μορφής $\Delta^\kappa x_\nu$ για κάθε θετικό ακέραιο κ. Προς το παρόν, επισημαίνουμε ότι:

$$\Delta\xi_\nu = \xi_{\nu+1} - \xi_\nu \quad \text{και} \quad \Delta^2\xi_\nu = \Delta(\Delta\xi_\nu) = \xi_{\nu+2} - 2\,\xi_{\nu+1} + \xi_\nu .$$

Ας εξετάσουμε τώρα την σύγκλιση της ακολουθίας $(y_\nu : \nu = 0,1,2,...)$.

Θεώρημα ΙΙΙ.1.2.(iii).1. ***Εάν η μέθοδος Δ^2 του Aitken εφαρμοστεί σε μία ακολουθία $(\xi_\nu : \nu = 0,1,2,\ldots) \subset \mathbb{R}$ που συγκλίνει προς το σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ και εάν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί A και B, με $0 < A < 1 < B$, τέτοιοι ώστε:***

$$\frac{\Delta\xi_{\nu+1}}{\Delta\xi_\nu} \notin [A,B]$$

για κάθε ν μεγαλύτερο από κάποιον φυσικό N, τότε η προκύπτουσα ακολουθία $(y_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ συγκλίνει επίσης προς το ξ.

Απόδειξη. Όπως διαπιστώνεται εύκολα, ισχύει ότι:

$$y_\nu - \xi = \xi_\nu - \xi - \frac{\Delta\xi_\nu}{\dfrac{\Delta\xi_{\nu+1}}{\Delta\xi_\nu} - 1} \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots).$$

Επειδή $0 < A < 1 < B$ και $(\Delta\xi_{\nu+1})/(\Delta\xi_\nu) \notin [A,B]$ $\forall \nu \geq N$, οι ποσότητες

$$\frac{\Delta\xi_{\nu+1}}{\Delta\xi_\nu}-1$$

είναι όλες, κατ' απόλυτη τιμή, κάτω φραγμένες (για κάθε $\nu \geq N$). Εξ άλλου $\lim_{\nu\to\infty}\Delta\xi_\nu = 0$, γιατί η ακολουθία $(\xi_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ είναι συγκλίνουσα.

Άρα :

$$\lim_{\nu\to\infty}(y_\nu - \xi) = \lim_{\nu\to\infty}(\xi_\nu - \xi) - \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\Delta\xi_\nu}{\frac{\Delta\xi_{\nu+1}}{\Delta\xi_\nu}-1}\right) = \lim_{\nu\to\infty}(\xi_\nu - \xi) = 0,$$

και η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι πλήρης. ■

Ας μελετήσουμε τώρα την επιτάχυνση της σύγκλισης που επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της μεθόδου Δ^2 του Aitken.

Θεώρημα ΙΙΙ.1.2.(iii).2. ***Εάν η μέθοδος*** Δ^2 ***του Aitken εφαρμοστεί σε μία ακολουθία*** $(\xi_\nu : \nu = 0,1,2,\ldots) \subset \mathbb{R}$ ***που συγκλίνει προς το σημείο*** $\xi \in \mathbb{R}$ ***και είναι τάξης*** 1 ***με ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος ίση με*** $C \neq 1,$ ***τότε*** $\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \xi$ ***και η προκύπτουσα ακολουθία*** $(y_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ ***συγκλίνει πιο γρήγορα από τις ακολουθίες*** $(\xi_{\nu+1} : \nu = 0,1,...)$ ***και*** $(\xi_{\nu+2} : \nu = 0,1,...)$ ***υπό την έννοια ότι:***

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{y_\nu - \xi}{\xi_{\nu+1} - \xi} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{y_\nu - \xi}{\xi_{\nu+2} - \xi} = 0.$$

Απόδειξη. Η υπόθεση ότι η συγκλίνουσα προς το ξ ακολουθία $(\xi_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ είναι τάξης 1, με ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος ίση με $C \neq 1$, μπορεί να διατυπωθεί πιο επεξηγηματικά με τον εξής ισοδύναμο τρόπο :

$$\xi_{\nu+1} - \xi = (C + \varepsilon_\nu)\,(\xi_\nu - \xi)\,,$$

για κάθε *ν* μεγαλύτερο από κάποιον φυσικό αριθμό N και για κάποια $\varepsilon_\nu \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0.$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$y_\nu - \xi = \xi_{\nu+1} - \xi - \frac{\Delta\xi_\nu\ \Delta\xi_{\nu+1}}{\Delta^2\xi_\nu}\,,$$

με:

$$\Delta\xi_\nu = (\xi_{\nu+1} - \xi) - (\xi_\nu - \xi) = \frac{(C - 1 + \varepsilon_\nu)\,(\xi_{\nu+1} - \xi)}{C + \varepsilon_\nu}\,,$$

$$\Delta\xi_{\nu+1} = (C - 1 + \varepsilon_{\nu+1})\,(\xi_{\nu+1} - \xi)\,,$$

$$\Delta^2\xi_\nu = [(C-1)^2 + (C-2)\,\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}\,(C + \varepsilon_\nu)]\,\frac{(\xi_{\nu+1} - \xi)}{C + \varepsilon_\nu}\,,$$

για κάθε $\nu \geq N$.

Αφού πραγματοποιήσουμε τις αντικαταστάσεις, βρίσκουμε:

$$y_\nu - \xi = (\xi_{\nu+1} - \xi)\left[1 - \frac{(C - 1 + \varepsilon_\nu)\,(C - 1 + \varepsilon_{\nu+1})}{(C-1)^2 + (C-2)\,\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu+1}\,(C + \varepsilon_\nu)}\right] \quad (\nu \geq N).$$

Επομένως εάν $C \neq 1$, τότε $\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \xi$ και η ακολουθία $(y_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ συγκλίνει πιο γρήγορα από την ακολουθία $(\xi_{\nu+1} : \nu = 0,1,...)$, υπό την έννοια

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{y_\nu - \xi}{\xi_{\nu+1} - \xi} = 0.$$

Επί πλέον, επειδή, όπως είδαμε στην *Παρατήρηση ΙΙΙ.1.13.(i)*, $C \neq 0$, θα είναι και:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{y_\nu - \xi}{\xi_{\nu+2} - \xi} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{y_\nu - \xi}{\xi_{\nu+1} - \xi} . \lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_{\nu+1} - \xi}{\xi_{\nu+2} - \xi} = 0,$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(y_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ συγκλίνει πιο γρήγορα από την ακολουθία $(\xi_{\nu+2} : \nu = 0,1,...)$. ■

Παρατήρηση ΙΙΙ.1.2.(iii).3. Η μέθοδος Δ^2 του Aitken είναι μία μερική περίπτωση γενικότερου ενός αλγόριθμου επιτάχυνσης της σύγκλισης που είναι πολύ πιο ισχυρός: του *ε-αλγόριθμου,* που οφείλεται στον *Wynn* (1956). ■

Η ***μέθοδος Steffensen*** είναι ένας αλγόριθμος επίλυσης της εξίσωσης $\xi = F(\xi)$ που βασίζεται στην μέθοδο Δ^2 του Aitken.

Η βασική ιδέα, γύρω από τη οποία οργανώνεται η μέθοδος Steffensen, προέρχεται από το επόμενο:

Θεώρημα ΙΙΙ.1.2.(iii).4. ***Εάν η συνάρτηση*** $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ***είναι διαφορίσιμη στην περιοχή του σταθερού της σημείου ξ και εάν*** $F'(\xi)\neq 1,$ ***τότε και η συνεχής επέκταση σε όλο το*** $\mathbb{R}$ ***της συνάρτησης***

$$G(x)=\frac{x\,F(F(x))-[F(x)]^2}{F(F(x))-2\,F(x)+x}\qquad (x\neq\xi)$$

έχει σταθερό το σημείο $G(\xi)=\xi.$

Απόδειξη. Κατά αρχήν παρατηρούμε ότι , επειδή $\xi=F(\xi)$, η τιμή $G(\xi)$ είναι απροσδιόριστη, της μορφής $0/0$, γιαυτό και ορίζουμε την συνεχή επέκταση της G στο ξ χρησιμοποιώντας τον κανόνα του de l' Hospital:

$$G(\xi)=\frac{F(F(\xi))+\xi\,F'(\xi)\,F'(F(\xi))-2\,F(\xi)\,F'(\xi)}{F'(\xi)\;F'(F(\xi))-2\,F'(\xi)+1}.$$

Είναι τότε φανερό ότι , επειδή $F'(\xi)\neq 1$, είναι :

$$G(\xi)=\frac{\xi+\xi\,[F'(\xi)]^2-2\,\xi\,F'(\xi)}{[F'(\xi)]^2-2\,F'(\xi)+1}=\xi\,.\ \blacksquare$$

Παρατήρηση ΙΙΙ.1.2.(iii).5. Η περίπτωση $F'(\xi)=1$ σημαίνει ότι το ξ είναι πολλαπλή ρίζα της εξίσωσης $\xi-F(\xi)=0$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ανάλογο συμπέρασμα με αυτό του προηγούμενου *Θεωρήματος*.

Πιο συγκεκριμένα, εάν p είναι η πολλαπλότητα της ρίζας ξ και εάν η F είναι $p-$φορές συνεχώς διαφορίσιμη στην περιοχή του ξ, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$G(\xi+\varepsilon)=\xi+\left(1-\frac{1}{p}\right)\varepsilon+\mathrm{O}(\varepsilon^2)$$

για κάθε $\varepsilon>0$. Το σύμβολο $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ αναπαριστά μία συνάρτηση η οποία είναι φραγμένη από κάποιο πολλαπλάσιο του ε^2. ■

Μετά από όσα προηγήθηκαν, μπορούμε να ορίσουμε την μέθοδο Steffensen, σύμφωνα με το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα:

$$\xi_{\nu+1}=G(\xi_\nu)=\frac{\xi_\nu\ F(F(\xi_\nu))-[F(\xi_\nu)]^2}{F(F(\xi_\nu))-2F(\xi_\nu)+\xi_\nu}\qquad(\nu=0,1,2,\ldots)$$

Ας μελετήσουμε την σύγκλιση και την τάξη της μεθόδου Steffensen. Έχουμε το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.1.2.(iii).5. ***Ας υποθέσουμε ότι η επαναληπτική μέθοδος που εισάγεται από την συνάρτηση*** F **(δηλαδή η ακολουθία** $(\xi_{\nu+1}=F(\xi_\nu):\nu=0,1,2,\ldots)$**)** ***είναι τάξης*** r ***και ότι η*** F ***είναι*** $r-$***φορές συνεχώς διαφορίσιμη στην περιοχή του σταθερού της σημείου*** ξ***.***

Εάν $r=1$ ***και*** $F'(\xi)\neq 1$***, τότε η μέθοδος Steffensen είναι τουλάχιστον τάξης*** r***, ενώ εάν*** $r>1$ ***τότε η μέθοδος Steffensen είναι τουλάχιστον τάξης*** $2r-1$***. Σε κάθε περίπτωση, η μέθοδος Steffensen συγκλίνει, εφ' όσον***

$$\lim_{\nu\to\infty}F(\xi_\nu)=\xi.$$

Απόδειξη. Εάν οι επαναλήψεις $\xi_{\nu+1} = F(\xi_\nu)$ είναι τάξης r και εάν η F είναι $r-$φορές συνεχώς διαφορίσιμη στην περιοχή του ξ, τότε:

$$F(\xi+h) = \xi + A\,h^r + o(h^r), \quad \text{όπου} \quad A = [F^{(r)}(\xi)/r!],$$

και:

$$\begin{aligned} F(F(\xi+h)) &= F(\xi + A\,h^r + o(h^r)) \\ &= \xi + A\,(A\,h^r + o(h^r))^r + o(h^{r^2}) \\ &= \xi + A^{r+1}\,h^{r^2} + o(h^{r^2}). \end{aligned}$$

Επομένως:

$$G(\xi+h) = \frac{[\xi + A^{r+1}\,h^{r^2} + o(h^{r^2})](\xi+h) - [\xi + A\,h^r + o(h^r)]^2}{\xi + A^{r+1}\,h^{r^2} + o(h^{r^2}) - 2\,\xi - 2\,A\,h^r - o(h^r) + \xi + h}$$

$$= \xi + \frac{A^{r+1}\,h^{r^2+1} - A^2\,h^{2r} + o(h^{2r})}{A^{r+1}\,h^{r^2} - 2\,A\,h^r + h + o(h^r)}.$$

Εάν $r > 1$, βλέπουμε ότι $G(\xi+h) = \xi - A^2\,h^{2r-1} + o(h^{2r-1})$, οπότε , παίρνοντας $h = \xi_\nu - \xi$, θα είναι:

$$G(\xi+h) = \xi_{\nu+1} = \xi - A^2\,(\xi_\nu - \xi)^{2r-1} + o(h^{2r-1}),$$

που φανερώνει ότι η μέθοδος Steffensen είναι τάξης $2r-1$.

Εάν $r = 1$, βλέπουμε ότι:

$$G(\xi+h) = \xi + o(h^2)\,[(A-1)^2\,h + o(h)]^{-1},$$

οπότε , επειδή $F'(\xi) \neq 1$ και συνεπώς επειδή $A \neq 1$, θα είναι:

$$G(\xi + h) = \xi + h\ o(1) \Rightarrow G'(\xi) = 0$$

που φανερώνει ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, η μέθοδος Steffensen είναι τάξης 2. Ας σημειωθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις δεν χρειάσθηκε η θεώρηση της υπόθεσης ότι $\lim_{\nu\to\infty} F(\xi_\nu) = \xi$.

Όμως η συνθήκη $\lim_{\nu\to\infty} F(\xi_\nu) = \xi$ είναι ικανή να εξασφαλίσει την σύγκλιση $\lim_{\nu\to\infty} G(\xi_\nu) = \xi$, με δεδομένη τη συνέχεια της *G*. ■

Παρατήρηση III.1.2.(iii).7. Από αριθμητικής άποψης, η μέθοδος Steffensen στην περίπτωση όπου $r = 1$ είναι λιγότερο προνομιούχα συγκριτικά με την μέθοδο της εσφαλμένης θέσης, γιατί σε κάθε επανάληψη της μεθόδου Steffensen απαιτούνται δύο υπολογισμοί τιμών συναρτήσεων. ■

III.1.2.(iv). Οι Μέθοδοι Ανώτερης Τάξης Σύγκλισης

Έστω ότι δίνεται προς επίλυση η αλγεβρική εξίσωση $f(\xi) = 0$.

Εάν η συνάρτηση f είναι $r-$φορές συνεχώς διαφορίσιμη στην περιοχή της ρίζας ξ, τότε είναι δυνατή η κατασκευή επαναληπτικών μεθόδων τάξεων $2,3,\ldots,r+1$ μετά από ταύτιση των αρχικών όρων στο ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά Taylor.

Συγκεκριμένα , ας θεωρήσουμε την επαναληπτική μέθοδο:

$$\xi_{\nu+1} = F(\xi_\nu),$$

με:

$$F(t) = t + \sum_{j=1}^{r} a_j(t)\,[f(t)]^j .$$

Προφανώς , όταν οι ποσότητες $a_j(\xi)$ είναι όλες πεπερασμένες, ισχύει

$$\xi = F(\xi) .$$

Θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $a_j(t)$ έτσι ώστε:

$$F'(\xi) = F''(\xi) = \ldots = F^{(r+1)}(\xi) = 0 .$$

Είναι σαφές ότι μία τέτοια αξίωση ισοδυναμεί με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$1 + a_1(\xi)\, f'(\xi) = 0 .$$

$$a_1(\xi)\, f''(\xi) + 2\, a_1'(\xi)\; f'(\xi) + 2\, a_2(\xi)[f'(\xi)]^2 = 0 ,$$

.....

το οποίο αν επιλυθεί ως προς $a_1(\xi), a_2(\xi), \ldots, a_r(\xi)$, δείχνει ότι οι συναρτήσεις $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_r(t)$ αρκεί να επιλεγούν έτσι ώστε να είναι της μορφής:

$$a_1(t) = -\frac{1}{f'(t)} ,$$

$$a_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{f''(t)}{[f'(t)]^3} ,$$

$$\vdots$$

Καταλήγουμε λοιπόν κατά αυτόν τον τρόπο στις εξής επαναληπτικές μεθόδους:

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu - \frac{f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)}$$ ***, που είναι τάξης*** 2 ,

$$\xi_{\nu+1} = \xi_\nu - \frac{f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)} - \frac{f''(\xi_\nu)\,[f(\xi_\nu)]^2}{2\,[f'(\xi_\nu)]^3}$$ ***, που είναι τάξης*** 3 ,

.....

III.1.3. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Το πρόβλημα για το οποίο θα ενδιαφερθούμε σε αυτήν την *Παράγραφο* είναι αυτό της επίλυσης της εξίσωσης $\xi = F(\xi)$ (ή της $f(\xi) = 0$), όπου F (ή f) είναι μία απεικόνιση ενός μέρους του $\mathbb{R}^n$ μέσα στο $\mathbb{R}^n$ με $n \geq 1$.

Λίγες μέθοδοι της προηγούμενης *Παραγράφου* μπορούν να γενικευθούν με εύλογο τρόπο στην πολυδιάστατη περίπτωση.

Στην συνέχεια, δεν θα αναφέρουμε παρά μόνον δύο. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο εξαιρετικό βιβλίο $[49]$.

III.1.3.(i). Η Μέθοδος Newton

Έστω η προς επίλυση εξίσωση :

$$f(\xi) = 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι η απεικόνιση *f* είναι μία φορά συνεχώς διαφορίσιμη στην περιοχή της ρίζας ξ.

Όπως και στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, μία απεικόνιση ενός (ανοικτού) συνόλου του $\mathbb{R}^n$ μέσα στο $\mathbb{R}^n$ λέγεται ***κ – φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο σύνολο αυτό***, εάν οι παράγωγοι μέχρι και κ – τάξης της απεικόνισης υπάρχουν και είναι συνεχείς.

Τότε:

$$\begin{aligned} f(\xi^{(\nu+1)}) &= f(\xi^{(\nu)} + \xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)}) \\ &= f(\xi^{(\nu)}) + f'(\xi^{(\nu)})(\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)}) + o(\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)}), \end{aligned}$$

όπου $f'(\xi^{(\nu)})$ είναι η τιμή του Ιακωβιανού πίνακα της f στο $\xi^{(\nu)}$ και $o(h)$ είναι μία συνάρτηση R^n μέσα στον εαυτό του τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0}[o(h)/h]=0$.

Επιλέγουμε το $\xi^{(\nu+1)}$ έτσι ώστε:

$$f(\xi^{(\nu+1)}) = o(\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)}).$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\xi^{(\nu+1)}$ πρέπει να επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε :

$$0 = f(\xi^{(\nu)}) + f'(\xi^{(\nu)})\,(\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)}).$$

Ο *Τύπος* αυτός δίνει την ***επαναληπτική μέθοδο Newton***:

$$\xi^{(\nu+1)} = \xi^{(\nu)} - [f'(\xi^{(\nu)})]^{-1}\, f(\xi^{(\nu)}) \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots)$$

για κάποιο δεδομένο πρώτο σημείο εκκίνησης της μεθόδου, έστω $\xi^{(0)}$***, και κάτω από την προϋπόθεση ότι υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας*** $[f'(\xi^{(\nu)})]^{-1}$ ***του πίνακα*** $f'(\xi^{(\nu)})$.

Βλέπουμε αμέσως ότι εάν $\lim_{\nu\to\infty}\xi^{(\nu)} = \xi$, τότε $\xi = \xi - [f'(\xi)]^{-1}\, f(\xi)$ και επομένως:

$$f(\xi) = 0,$$

εάν ο πίνακας $f'(\xi)$ είναι αντιστρέψιμος.

Ας εξετάσουμε τώρα την τάξη σύγκλισης της μεθόδου :

Θεώρημα ΙΙΙ.1.3.(i).1. ***Εάν ξ είναι μία ρίζα της f και εάν ο Ιακωβιανός πίνακας $f'(\xi)$ της f στο ξ είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει μία περιοχή του ξ τέτοια ώστε, για κάθε $\xi^{(0)}$ που ανήκει σε αυτήν την περιοχή, η ακολουθία $(\xi^{(\nu)} : \nu = 0,1,2,\ldots)$, που παράγεται από την επαναληπτική μέθοδο Newton, να συγκλίνει προς το ξ και να έχει τάξη σύγκλισης τουλάχιστον 2.***

Απόδειξη. Η μέθοδος Newton είναι της μορφής:

$$\xi^{(\nu+1)} = F(\xi^{(\nu)}),$$

με:

$$F(x) = x - [f'(x)]^{-1}\ f(x).$$

Επειδή:

$F(\xi + h) = \xi + h - [f'(\xi + h)]^{-1}\ f(\xi + h)$ και
$f(\xi + h) = f(\xi) + f'(\xi)\ h + \mathrm{o}(h) = f'(\xi)\ h + o(h),$ έχουμε:

$$F(\xi + h) - \xi = \{\mathrm{I} - [f'(\xi + h)]^{-1}\ f(\xi)\}\ h - [f'(\xi + h)]^{-1})\ o(h)$$

και επομένως, μία εφαρμογή του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.1.6* μπορεί να βεβαιώσει ότι εάν ο πίνακας $f'(\xi)$ είναι αντιστρέψιμος τότε:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \in \mathbb{R}^n)}} \frac{\|F(\xi + h) - \xi\|}{\|h\|} = 0\,,$$

που εγγυάται ότι η μέθοδος Newton έχει τάξη σύγκλισης 2.■

Παρατήρηση ΙΙΙ.1.3.(i).2. Το κύριο μειονέκτημα της μεθόδου Newton είναι ότι είναι απαραίτητο (πριν από κάθε εργασία προγραμματισμού σε υπολογιστική μηχανή) να υπολογισθεί η έκφραση του Ιακωβιανού πίνακα, πράγμα που σημαίνει πως όταν $n = 20$ πρέπει να υπολογισθούν 400 παράγωγοι. Το μειονέκτημα αυτό αντιμετωπίζεται με την μέθοδο Henrici. ■

ΙΙΙ.1.3.(ii). Η Μέθοδος Henrici.

Η ***μέθοδος Henrici*** μπορεί να θεωρηθεί σαν μία πολυδιάστατη γενίκευση της μεθόδου Steffensen.

Κατ' αρχάς, εκφράζουμε την εξίσωση $f(\xi) = 0$ σε μία ισοδύναμη μορφή της: $\xi = F(\xi)$ και θέτουμε:

$$u^{(0)} := \xi^{(\nu)}$$

$$u^{(1)} := F(u^{(0)})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(n)} := F(u^{(n-1)})$$

Συμβολίζουμε με $\Delta u^{(j)}$ το διάνυσμα $u^{(j+1)} - u^{(j)}$ και ας υποθέσουμε ότι η F είναι διαφορίσιμη στην περιοχή του ξ.

Παραβλέποντας τα διανύσματα $o(u^{(j)} - \xi)$, και μηδενίζοντάς τα, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\Delta u^{(j+1)} = F'(\xi)\,\Delta u^{(j)} \quad j = 0,1,2,\dots,n-1\,.$$

Το τελευταίο σύστημα εξισώσεων συνοψίζεται με τη γλώσσα των πινάκων σε μία ισοδύναμη διατύπωση:

Εάν $U^{(j)}$ είναι ο τετραγωνικός πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $\left(u^{(j)},\ldots,u^{(j+n-1)}\right)$ και εάν $\Delta U^{(j)}$ είναι ο πίνακας $U^{(j+1)}-U^{(j)}$, τότε

$$\Delta U^{(1)} = F'(\xi)\,\Delta U^{(0)}$$

και επομένως

$$F'(\xi) = \Delta U^{(j)}\left(\Delta U^{(0)}\right)^{-1}.$$

Έχουμε:

$$u^{(1)} - \xi = F'(\xi)\left(u^{(0)} - \xi\right) \Leftrightarrow \xi = u^{(0)} + \left[\mathrm{I} - F'(\xi)\right]^{-1}$$

εφ' όσον φυσικά ο πίνακας $\mathrm{I} - F'(\xi)$ είναι αντιστρέψιμος, αξίωση που δεν είναι τίποτε άλλο από την συνθήκη της μεθόδου Newton ότι ο πίνακας $f'(\xi)$ είναι αντιστρέψιμος.

Επειδή:

$$\left[\mathrm{I} - F'(\xi)\right]^{-1} = \left[\mathrm{I} - \Delta U^{(j)}\left(\Delta U^{(0)}\right)^{-1}\right]^{-1} = -\Delta U^{(0)}\,(\Delta^2 U^{(0)})^{-1},$$

όπου ο πίνακας $\Delta^2 U^{(0)}$ ορίζεται από την σχέση $\Delta^2 U^{(0)} = \Delta U^{(1)} - \Delta U^{(0)}$, βλέπουμε ότι τελικά ισχύει:

$$\xi = u^{(0)} - \Delta U^{(0)}\,(\Delta^2 U^{(0)})^{-1}\,\Delta u^{(0)},$$

και η επαναληπτική μέθοδος Henrici είναι της μορφής:

$$\xi^{(\nu-1)} = u^{(0)} - \Delta U^{(0)}\,(\Delta^2 U^{(0)})^{-1}\,\Delta u^{(0)}$$

όπου:

$$u^{(0)} := \xi^{(\nu)}$$

$$u^{(1)} := F(u^{(0)})$$

.....

$$u^{(n)} := F(u^{(n-1)})$$

$$U^{(0)} = (u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)})$$

$$U^{(1)} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)})$$

$$U^{(2)} = (u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots, u^{(n+1)})$$

$$\Delta U^{(0)} = U^{(1)} - U^{(0)}$$

$$\Delta U^{(1)} = U^{(2)} - U^{(1)}$$

$$\Delta^2 U^{(0)} = \Delta \mathrm{U}^{(1)} - \Delta U^{(0)}$$

$$\Delta u^{(0)} = u^{(1)} - u^{(0)}.$$

Από θεωρητικής άποψης, η μελέτη αυτού του αλγόριθμου δεν έχει ολοκληρωθεί. Εν τούτοις, υπάρχουν πολλά πειραματικά αποτελέσματα, αλλά και αρκετές θεωρητικές εφαρμογές ειδικών περιπτώσεών του, που ενθαρρύνουν την πεποίθηση ότι η σύγκλιση του αλγόριθμου του Henrici είναι τετραγωνική, ακόμα και αν η βασική επαναληπτική ακολουθία $(u^{(j+1)} = F(u^{(j)}) : j = 0,1,\ldots)$, με την βοήθεια της οποίας σχηματοποιείται, αποκλίνει. Δυστυχώς, όμως, φαίνεται ότι στην πράξη αυτή η μέθοδος είναι ασταθής.

Εκτός από την μέθοδο Henrici, υπάρχει και μία δεύτερη γενίκευση της μεθόδου Steffensen, η οποία στηρίζεται στον $\varepsilon -$ ***αλγόριθμο***.

Πρόκειται για έναν αλγόριθμο που έχει τετραγωνική σύγκλιση και για τις επαναλήψεις του οποίου δεν απαιτείται ο υπολογισμός καμμίας παραγώγου. Η μόνη απαραίτητη συνθήκη για την οργάνωση και σύγκλιση αυτού του αλγορίθμου είναι η αντιστρεψιμότητα του πίνακα

$$\mathrm{I} - F'(\xi).$$

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον αλγόριθμο αυτό παρέχονται στο βιβλίο $[6]$.

III.1.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Μία ιδιαιτέρως σπουδαία περίπτωση επίλυσης αλγεβρικής εξίσωσης είναι εκείνη του υπολογισμού των ριζών ενός πολυωνύμου. Για λόγους απλοποίησης, θα υποθέτουμε ότι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί και θα το συμβολίζουμε με:

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \; x^j$$

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη των επαναληπτικών μεθόδων υπολογισμού των ριζών του πολυωνύμου $p_k(x)$, θα υπενθυμίσουμε έναν ορισμένο αριθμό κλασσικών αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε χωρίς απόδειξη. Έστω

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$$

οι ρίζες του $p_k(x)$.

III.1.4.1. Συμμετρικές συναρτήσεις των ριζών (Σχέσεις Vieta):

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j = -\frac{a_{k-1}}{a_k},$$

$$\sum_{i<j} \xi_i \; \xi_j = \frac{a_{k-2}}{a_k},$$

$$\sum_{i<j<p} \xi_i \; \xi_j \; \xi_p = -\frac{a_{k-3}}{a_k},$$

.....

$$\xi_i \; \xi_j \; \xi_k = (-1)^k \frac{a_0}{a_k}.$$

III.1.4.2. Σχέσεις Newton:

Εάν $s_p = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^p$ ***, τότε:***

$$a_k\, s_1 + a_{k-1} = 0$$
$$a_k\, s_2 + a_{k-1}\, s_1 + 2\, a_{k-2} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k\, s_k + a_k\, s_{k-1} + \ldots + a_1\, s_1 + k\, a_0 = 0\,.$$

III.1.4.3. Κανόνας Descartes:

Εάν N_1 ***είναι το πλήθος των θετικών ριζών του*** $p_k(x)$ ***και εάν*** N_2 ***είναι πλήθος των εναλλαγών των προσήμων στην ακολουθία*** $(\xi_k, \xi_{k-1}, \ldots, \xi_1, \xi_0)$ ***,τότε ο αριθμός***

$$(N_2 - N_1)$$

είναι άρτιος. (Αντικαθιστώντας το x ***με το*** $-x$***, μπορούμε να συνάγουμε το ανάλογο αποτέλεσμα για το πλήθος των αρνητικών ριζών του*** $p_k(x)$.)

III.1.4.4. Θεώρημα Ακεραίων Ριζών:

Εάν όλοι οι συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_k$ ***του πολυωνύμου*** $p_k(x)$ ***είναι ακέραιοι και εάν ο ακέραιος*** $\xi \neq 0$ ***είναι ρίζα της εξίσωσης*** $p_k(\xi) = 0$***, τότε ο*** ξ ***είναι διαιρέτης του σταθερού όρου*** a_0 ***.***

III.1.4.5. Ακολουθίες Sturm:

Θέτουμε:

$$f_0(x) := p_k(x),$$
$$f_1(x) := p_k'(x).$$

Στην συνέχεια, παίρνουμε σαν $f_2(x)$ το αρνητικό του υπολοίπου της διαίρεσης $f_0(x)/f_1(x)$, σαν $f_3(x)$ το αρνητικό του υπολοίπου της διαίρεσης $f_1(x)/f_2(x)$.

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργούμε την ακολουθία:

$$f_0(x) = q_1(x) f_1(x) - f_2(x)$$
$$f_1(x) = q_2(x) f_2(x) - f_3(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{k-1}(x) = q_k(x) f_k(x).$$

Το $f_k(x)$ είναι ταυτοτικά ίσο με μία μη μηδενική σταθερά.

Παίρνουμε $A < B$ και θεωρούμε τις δύο πεπερασμένες ακολουθίες:

$$f_0(A), f_1(A), f_2(A), \dots, f_k(A)$$
$$f_0(B), f_1(B), f_2(B), \dots, f_k(B).$$

Εάν τώρα $N(A)$ και $N(B)$ είναι οι αριθμοί που αναπαριστούν το πλήθος των αλλαγών προσήμου σ' αυτές τις δύο ακολουθίες, αντίστοιχα, τότε: ο αριθμός των ανά δύο διάφορων πραγματικών ριζών της $p_k(\xi) = 0$ που ανήκουν στο διάστημα $[A, B]$ ισούται με

$$N(A)\, N(B).$$

Επί πλέον, *εάν η εξίσωση $p_k(\xi) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πολλαπλή ρίζα, τότε υπάρχει m τέτοιο ώστε το $f_{m+1}(x)$ να είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν, και οι πολλαπλές ρίζες του $p_k(x)$ να είναι απλές ρίζες του $f_m(x)$.*

Έτσι, ο αριθμός των ανά δύο διάφορων ριζών (όταν έχουμε προσμετρήσει κάθε πολλαπλή ρίζα σαν απλή ρίζα) βρίσκεται με την βοήθεια του παραπάνω αποτελέσματος θεωρώντας τις πεπερασμένες ακολουθίες:

$$f_0(A), f_1(A), f_2(A), \ldots, f_k(A) \text{ και } f_0(B), f_1(B), f_2(B), \ldots, f_k(B).$$

III.1.4.6. Εντοπισμός των Ριζών:

Όλες οι ρίζες $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ της εξίσωσης $p_k(\xi) = 0$ βρίσκονται τοποθετημένες μέσα στον επίπεδο δακτύλιο που ορίζεται από τις ανισοτικές σχέσεις:

$$\frac{|a_0|}{\mathrm{a}+|a_0|} \le |z| \le \frac{\mathrm{b}+|a_k|}{|a_k|},$$

όπου:

$$\mathrm{a} = max\{|a_k|, \ldots, |a_1|\},$$
$$\mathrm{b} = max\{|a_{k-1}|, \ldots, |a_0|\}.$$

III.1.4.7. Υπολογισμός της αριθμητικής τιμής πολυωνύμου σε ένα σημείο (Σχήμα Hörner):

Εάν t είναι κάποιο σημείο της πραγματικής ευθείας τότε:

$$p_k(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

Είναι σαφές ότι η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφεί υπό την μορφή:

$$p_k(t) = (\cdots(a_k t + a_{k-1})t + a_{k-2})t + a_0$$

Η σχέση αυτή οδηγεί στην κατασκευή ενός τρόπου υπολογισμού της αριθμητικής τιμής του p_k στο σημείο t: Θέτουμε διαδοχικά:

$$P_0(t) := a_k$$
$$P_1(t) := t\, P_0(t) + a_{k-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$.\, P_j(t) := t\, P_{j-1}(t) + a_{k-j} \quad (j = 1,2,\cdots,k).$$

Είναι τότε εύκολη η επαλήθευση της ισότητας :

$$P_k(t) + \sum_{j=0}^{k} a_j\, t^j = p_k(t).$$

Ας προχωρήσουμε τώρα στην μελέτη των επαναληπτικών μεθόδων που υπολογίζουν τις ρίζες πολυωνύμου:

III.1.4.(i). Η Μέθοδος Newton Είναι προφανές ότι η μέθοδος Newton, που παρουσιάσθηκε στην *Παράγραφο III.1.2*, μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση ενός πολυωνύμου $p_k(x)$:

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{p_k(x_\nu)}{p_k'(x_\nu)} \quad (x_0 : \text{δοθέν σημείο}).$$

Η αριθμητική τιμή του $p_k(x_\nu)$ βρίσκεται με την βοήθεια του σχήματος Hörner:

$$p_0(x_\nu) = a_k$$
$$p_j(x_\nu) = x_\nu\, p_{j-1}(x_\nu) + a_{k-j} \quad (j = 1,2,\ldots,k).$$

Ομοίως, η αριθμητική τιμή του $p_k'(x_v)$ βρίσκεται από τους τύπους:

$$p_0'(x_v) = a_k$$
$$p_j'(x_v) = x_v\, p_{j-1}'(x_v) + p_{j-1}(x_v) \quad (j = 1,2,\ldots,k).$$

Η σύγκλιση αυτής της μεθόδου προσδιορίζεται ανάλογα με τις υποθέσεις και τα αποτελέσματα του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.2.(ii).1*.

Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η επιλογή του αρχικού σημείου x_0, έτσι ώστε η παραγόμενη ακολουθία $(x_v : v = 0,1,2,\ldots)$ να συγκλίνει προς μία ρίζα ξ της εξίσωσης $p_k(\xi) = 0$, είναι ένα κρίσιμο και ευαίσθητο ζήτημα και, επί πλέον, ότι η σύγκλιση της παραγόμενης ακολουθίας $(x_v : v = 0,1,2,\ldots)$ προς μία μιγαδική ρίζα της $p_k(\xi) = 0$ δεν είναι εφικτή παρά μόνον όταν το x_0 είναι μιγαδικός αριθμός.

Από την στιγμή που θα έχει βρεθεί μία ρίζα (παραδείγματος χάριν, η ξ_1), μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό μίας δεύτερης ρίζας ξ_2, ξαναρχίζοντας την διαδικασία της μεθόδου αυτή την φορά όχι για το πολυώνυμο $p_k(x) = 0$ αλλά για το πολυώνυμο:

$$p_{k-1}(x) = \frac{p_k(x)}{x - \xi_1}.$$

Στην πραγματικότητα όμως δεν θα έχει βρεθεί με τη μέθοδο Newton, η ακριβής τιμή της ρίζας ξ_1, αλλά μία προσεγγιστική τιμή $\tilde{\xi}_1$.

Οι συντελεστές του πολυωνύμου:

$$\tilde{p}_{k-1}(x) = \frac{p_k(x)}{x - \tilde{\xi}_1}.$$

θα είναι προφανώς διαφορετικοί από αυτούς του πολυωνύμου $p_{k-1}(x)$.

Έτσι, γενικά, μία δεύτερη ρίζα ξ_2 δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί παρά μόνον με αυξανόμενη απώλεια της ακρίβειας.

III.1.4.(ii). Η μέθοδος Lin Έστω ξ_1 μία ρίζα της εξίσωσης $p_k(\xi)=0$.

Σύμφωνα με το σχήμα Hörner, ισχύει:

$$p_k(\xi)=0=\xi_1\ p_{k-1}(\xi_1)+a_0,$$

δηλαδή:

$$\xi_1=-\frac{a_0}{p_{k-1}(\xi_1)}.$$

Η ***μέθοδος Lin*** προέρχεται από την πιο πάνω σχέση.

Συγκεκριμένα, για δοθέν x_0, θέτουμε:

$$x_1:=-\frac{a_0}{p_{k-1}(x_0)}.$$

Είναι τότε φανερό ότι:

$$.\,x_1-x_0=-\frac{a_0+x_0\,p_{k-1}(x_0)}{p_{k-1}(x_0)}=-\frac{p_k(x_0)}{p_{k-1}(x_0)}.$$

Γενικεύοντας, οδηγούμαστε στην επαναληπτική μέθοδο Lin:

$$x_{\nu+1}=x_\nu-\frac{p_k(x_\nu)}{p_{k-1}(x_\nu)}\qquad (x_0:\text{δοθέν σημείο}).$$

Ο αλγόριθμος Lin μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$x_{\nu+1}=x_\nu\left[1-\frac{p_k(x_\nu)}{x_\nu\,p_{k-1}(x_\nu)}\right]=\frac{a_0\,x_\nu}{a_0-p_k(x_\nu)}\qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.1.1.6*, εάν:

$$0 < \left| 1 - \xi_1 \frac{p_k'(\xi_1)}{a_0} \right| < 1,$$

τότε η επαναληπτική ακολουθία Lin $(x_\nu : \nu = 0,1,2,...)$ συγκλίνει προς την ρίζα ξ_1 και έχει τάξη σύγκλισης ίση με 1. Από την στιγμή που θα έχει βρεθεί η ρίζα ξ_1, μπορούμε προχωρήσουμε στον υπολογισμό μίας δεύτερης ρίζας ξ_2, ξαναρχίζοντας την μέθοδο Lin για το πολυώνυμο $p_{k-1}(x) = p_k(x)/[x - \xi_1]$.

Επειδή όμως, στην πραγματικότητα δεν θα έχει βρεθεί, με την μέθοδο Lin, η ακριβής τιμή της ξ_1 αλλά μία προσέγγισή της, έστω $\tilde{\xi}_1$, θα πρέπει να ξαναρχίσουμε την μέθοδο Lin για το πολυώνυμο $\tilde{p}_{k-1}(x) = p_k(x)/[x - \tilde{\xi}_1]$, με συνέπεια ο προσεγγιστικός προσδιορισμός της δεύτερης ρίζας ξ_2 να επιβαρυνθεί με μία μεγαλύτερη απώλεια της ακρίβειας.

ΙΙΙ.1.4.(iii). Η Μέθοδος Bernoulli

Η ***μέθοδος Bernoulli*** βασίζεται στη εξίσωση πεπερασμένων διαφορών της οποίας η εξίσωση $p_k(\xi) = 0$ είναι η χαρακτηριστική εξίσωση. Εκτενέστερες πληροφορίες σχετικά με τις εξισώσεις διαφορών θα δοθούν αργότερα στην *Παράγραφο ΙV.4.3.(i)*.

Στην προκειμένη περίπτωση, η αντίστοιχη εξίσωση διαφορών είναι:

$$a_0\, y_\nu + a_1\, y_{\nu+1} + ... + a_k\, y_{\nu+k} = 0\,.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι ρίζες $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ της $p_k(\xi) = 0$ είναι ανά δύο διάφορες μεταξύ τους (είναι δηλαδή απλές ρίζες), και ότι:

$$|\xi_1| > |\xi_2| > \ldots > |\xi_k|.$$

Όπως θα δούμε στην *Παράγραφο IV.4.3.(i)*, η γενική λύση της πιο πάνω εξίσωσης διαφορών είναι:

$$y_v = c_1\, \xi_1^v + \cdots + c_k\, \xi_k^v \quad v = 0,1,2,\ldots,$$

όπου οι σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_k$ προσδιορίζονται από το δεδομένο των *k* αρχικών συνθηκών $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$.

Η μέθοδος Bernoulli συνίσταται στην αυθαίρετη θεώρηση αρχικών τιμών $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, έτσι ώστε $c_1 \neq 0$ και στην, εν συνεχεία, εφαρμογή της σχέσης:

$$y_{v+k} = -\frac{1}{a_k}(a_0\, y_v + a_1\, y_{v+1} + \ldots + a_{k-1}\, y_{v+k-1}) = 0 \quad v = 0,1,2,\ldots$$

Επειδή, όπως είδαμε, είναι:

$$y_v = c_1\, \xi_1^v \left[1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^v + \ldots + \frac{c_k}{c_1}\left(\frac{\xi_k}{\xi_1}\right)^v \right] \quad v = 0,1,2,\ldots,$$

συνεπάγεται ότι:

$$\frac{y_{v+1}}{y_v} = \xi_1 \frac{\left[1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{v+1} + \ldots + \frac{c_k}{c_1}\left(\frac{\xi_k}{\xi_1}\right)^{v+1} \right]}{\left[1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{v} + \ldots + \frac{c_k}{c_1}\left(\frac{\xi_k}{\xi_1}\right)^{v} \right]} \quad v = 0,1,2,\ldots,$$

οπότε παίρνοντας τα όρια στα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας, βρίσκουμε:

$$\lim_{v\to\infty}\frac{y_{v+1}}{y_v}=\xi_1,$$

γιατί

$$\frac{\xi_i}{\xi_j}<1 \qquad (i=2,3,\ldots,k).$$

Όσον αφορά στο σφάλμα σ_v κατά την $v-$οστή επανάληψη της μεθόδου έχουμε:

$$\sigma_v=\frac{y_{v+1}}{y_v}-\xi_1=s\,\lambda^v\,(1+\varepsilon),$$

όπου $s=\frac{c_2}{c_1}(\xi_2-\xi_1),\ \lambda=\frac{\xi_2}{\xi_1}$, και $\lim_{v\to\infty}\varepsilon_v=0$. Αυτό εγγυάται ότι:

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\sigma_{v+1}}{\sigma_v}=\frac{\xi_2}{\xi_1},$$

που σημαίνει ότι η μέθοδος Bernoulli έχει τάξη σύγκλισης με 1.

Μπορούμε να διασκευάσουμε την μέθοδο Bernoulli, που μόλις παρουσιάσαμε, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να συμπεριλάβουμε και τις περιπτώσεις πολλαπλών είτε μιγαδικών ριζών. Η γενίκευση αυτή, που είναι γνωστή σαν ***αλγόριθμος*** QD και οφείλεται ***Rutishauser***, επιτρέπει, επί πλέον, τον ταυτόχρονο υπολογισμό όλων των ριζών ενός πολυωνύμου.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι η σύγκλιση της ακολουθίας Bernoulli:

$$\left(\frac{y_{v+1}}{y_v}:v=0,1,2,\ldots\right)$$

μπορεί να επιταχυνθεί με την βοήθεια της μεθόδου Δ^2 του Aitken, γιατί όλες οι συνθήκες του *Θεωρήματος ΙΙΙ.1.2.(iii).2* ικανοποιούνται.

III.1.4.(iv). Η Μέθοδος Bairstow Η ***μέθοδος Bairstow*** έγκειται στην αναζήτηση αριθμών S και T, έτσι ώστε το πολυώνυμο $q(x) = x^2 - S\,x + T$ να διαιρεί το $p_k(x)$. Τότε, οι αριθμοί S και T θα είναι το άθροισμα και το γινόμενο, αντίστοιχα, δύο ριζών του $p_k(x)$.

Προκειμένου να κατανοήσουμε την μέθοδο, γράφουμε το πολυώνυμο $p_k(x)$ υπό την μορφή :

$$p_k(x) = q(x)\ p_{k-2}(x) + R(x),$$

όπου $p_{k-2}(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $k-2$ *και* $R(x)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ πρώτου βαθμού.

Θέτοντας:

$$p_{k-2}(\mathrm{x}) = \sum_{j=0}^{\mathrm{k-2}} \beta_j\ x^{k-j-2}, \quad R(x) = \beta_{k-1}\,(x - S) + \beta_k$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του *x*, βρίσκουμε:

$$\beta_0 = a_0$$

$$\beta_1 = a_1 + S\ \beta_0$$

$$\beta_2 = a_2 + S\ \beta_1 - T\,\beta_0$$

.....

$$\beta_j = a_j + S\ \beta_{j-1} - T\,\beta_{j-2}$$

.....

$$\beta_{k-1} = a_{k-1} + S\ \beta_{k-2} - T\,\beta_{k-3}$$

$$\beta_k = a_k + S\ \beta_{k-1} - T\,\beta_{k-2}\ .$$

Η ανεύρεση των αριθμών S και T, έτσι ώστε το πολυώνυμο $q(x)=x^2-Sx+T$ να είναι διαιρέτης του $p_k(x)$, σημαίνει ότι οι αριθμοί S και T πρέπει να αναζητηθούν έτσι ώστε $\beta_{k-1}=0$ και $\beta_k=0$.

Όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, τα β_{k-1} και β_k είναι (μη γραμμικές) συναρτήσεις των S και T.

Θα πρέπει λοιπόν να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα (μη γραμμικών) εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\beta_{k-1}(S,T)=0$$

$$\beta_k(S,T)=0$$

Η μέθοδος Bairstow συνίσταται στην επίλυση αυτού του συστήματος, με την εφαρμογή της μεθόδου Newton, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην *Παράγραφο ΙΙΙ.1.3.(ii)*.

Πράγματι το παραπάνω σύστημα μπορεί να εκφραστεί και σαν μία εξίσωση δύο μεταβλητών της μορφής $f(S,T)=0$ όπου f είναι η απεικόνιση

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (s,t) \mapsto f(s,t)=\left(\beta_{k-1}(s,t),\beta_k(s,t)\right)$$

και η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί με την μέθοδο Newton θεωρώντας την επαναληπτική ακολουθία :

$$\begin{pmatrix} s^{(\nu+1)} \\ t^{(\nu+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{(\nu)} \\ t^{(\nu)} \end{pmatrix} - J_\nu^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{k-1}(s^{(\nu)},t^{(\nu)}) \\ \beta_k(s^{(\nu)},t^{(\nu)}) \end{pmatrix},$$

όπου:

$$J_\nu = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \beta_{k-1}}{\partial s}(s^{(\nu)},t^{(\nu)}) & \dfrac{\partial \beta_{k-1}}{\partial t}(s^{(\nu)},t^{(\nu)}) \\ \dfrac{\partial \beta_k}{\partial s}(s^{(\nu)},t^{(\nu)}) & \dfrac{\partial \beta_k}{\partial t}(s^{(\nu)},t^{(\nu)}) \end{pmatrix} \qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Ας υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς s των συναρτήσεων β_{k-1} και β_k.

Προς τούτο, για κάθε $j = 0,1,\ldots,k$, θέτουμε:

$$\sigma_j := \frac{\partial \beta_j}{\partial s},$$

και παράγουμε τις σχέσεις που δίνουν τις συναρτήσεις β_j:

$$\sigma_0 = 0$$
$$\sigma_1 = \beta_0 + s\,\sigma_0 = \beta_0$$
$$\sigma_2 = \beta_1 + s\,\sigma_1 - t\,\sigma_0 = \beta_1 + s\,\sigma_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_j = \beta_{j-1} + s\,\sigma_{j-1} - t\,\sigma_{j-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_{k-1} = \beta_{k-2} + s\,\sigma_{k-2} - t\,\sigma_{k-3}$$
$$\sigma_k = \beta_{k-1} + s\,\sigma_{k-1} - t\,\sigma_{k-2}.$$

Επίσης, για κάθε $j = 0,1,2,\ldots,k$, θέτουμε:

$$\pi_j := \frac{\partial \beta_j}{\partial t},$$

και ενδεικτικά έχουμε:

$$\pi_0 = 0$$
$$\pi_1 = s\,\pi_0 = 0$$
$$\pi_2 = s\,\pi_1 - t\,\pi_0 - \beta_0 = -\beta_0 = -\sigma_1$$
$$\pi_3 = \sigma\,\pi_2 - t\,\pi_1 - \beta_1 = -s\,\sigma_1 - \beta_1 = -\sigma_2\ .$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, θα δείξουμε ότι

$$\pi_j = -\sigma_{j-1} \qquad (j = 1,2,\ldots,k).$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\pi_{j-2} = -\sigma_{j-3} \text{ και } \pi_{j-1} = -\sigma_{j-2}.$$

Τότε

$$\pi_j = s\,\pi_{j-1} - t\,\pi_{j-2} - \beta_{j-2} = -s\,\sigma_{j-2} + t\,\sigma_{j-3} - \beta_{j-2} = -\sigma_{j-1}\ ,$$

δηλαδή:

$$\pi_j = -\sigma_{j-1}, \text{ για κάθε } j = 1,2,\ldots,k.$$

Επομένως:

$$s^{(\nu+1)} = s^{(\nu)} + \frac{A^{(\nu)}}{\Delta^{(\nu)}},$$

$$t^{(\nu+1)} = t^{(\nu)} + \frac{B^{(\nu)}}{\Delta^{(\nu)}},$$

με:

$$A^{(\nu)} = \beta_{k-1}^{(\nu)}\,\sigma_{k-1}^{(\nu)} - \beta_k^{(\nu)}\,\sigma_{k-2}^{(\nu)},$$

$$\mathrm{B}^{(\nu)} = \beta_{k-1}^{(\nu)}\,\sigma_k^{(\nu)} - \beta_k^{(\nu)}\,\sigma_{k-1}^{(\nu)},$$

$$\Delta^{(\nu)} = \sigma_k^{(\nu)}\,\sigma_{k-2}^{(\nu)} - (\sigma_{k-1}^{(\nu)})^2.$$

Οι επαναλήψεις αρχίζουν με $s^{(0)} = t^{(0)} = 0$, και τελειώνουν όταν οι απόλυτες τιμές $\left|\beta_{k-1}^{(\nu)}\right|$ και $\left|\beta_k^{(\nu)}\right|$ γίνουν μικρότερες από μία ανεκτικότητα που έχει προκαθοριστεί.

Από την στιγμή που θα έχει προκύψει μία, κατά αυτόν τον τρόπο, αποδεκτή προσέγγιση των S και T, θα έχουμε πετύχει την προσέγγιση δύο ριζών της εξίσωσης

$$p_k(\xi) = 0.$$

Προκειμένου να οδηγηθούμε σε ικανοποιητικές προσεγγίσεις και των υπόλοιπων ριζών ξαναρχίζουμε την διαδικασία, αυτή την φορά με το πολυώνυμο $p_{k-2}(x)$ (αντί του $p_k(x)$), του οποίου γνωρίζουμε τους συντελεστές β_j, και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο $p_2(x)$ ή $p_1(x)$ βαθμού 2 ή 1, που παραγοντοποιούμε και βρίσκουμε τις ρίζες του αμέσως.

Αυτή η μέθοδος επιτρέπει τον κατά προσέγγιση υπολογισμό τόσο των μιγαδικών ριζών όσο και των πολλαπλών ριζών του $p_k(x)$.

Στην περίπτωση των πολλαπλών ριζών, η σύγκλιση της μεθόδου Bairstow δεν είναι πια τετραγωνική, αλλά μόνον γραμμική.

III.1.4.(ν). Η Μέθοδος Hörner Σύμφωνα με το *Θεώρημα των Ακεραίων Ριζών*, εάν ο ακέραιος $\xi \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$p_k(\xi) = 0$$

τότε ο ξ διαιρεί τον σταθερό όρο a_0 του $p_k(x)$.

Έτσι, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης

$$p_k(\xi) = 0$$

είναι οι ακέραιοι διαιρέτες

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$$

του a_0. Με το σχήμα του Hörner εξετάζουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $p_k(x)$.

Είναι φανερό ότι η ***μέθοδος Hörner*** αποσκοπεί στην εύρεση μόνον των ακέραιων ριζών του $p_k(x)$. Ωστόσο, μπορούμε πάντοτε με κατάλληλους μετασχηματισμούς να μετατρέπουμε το $p_k(x)$ σε γινόμενο της μορφής $\lambda\, q_k(x)$, όπου λ μία πραγματική σταθερά και το πολυώνυμο $q_k(x)$ να έχει βαθμό k και σταθερό όρο που είναι ακέραιος αριθμός.

Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι υπολογισμού των ριζών ενός πολυωνύμου, όπως η ***μέθοδος Graeffe*** και η ***μέθοδος Laguerre***. Σχετικά με αυτό το θέμα, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί την παραπομπή [31], όπως και τα συγγράμματα που αναφέρονται σε μεθόδους αριθμητικού υπολογισμού ιδιοτιμών πίνακα, επειδή τα δύο αυτά προβλήματα συνδέονται στενά.

III.2. ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

III.2.1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΝΟΡΜΑ

Μέχρι τώρα, θεωρήσαμε ένα φυσικό τρόπο ορισμού πρόσθεσης + δύο τυχαίων σημείων $X=(x_1,...,x_n)^T$ και $Y=(y_1,...,y_n)^T$ του $\mathbb{K}^n$, καθώς και ένα εύλογο τρόπο αριθμητικού πολλαπλασιασμού. κάθε πραγματικού αριθμού $\lambda\in\mathbb{R}$ (ή κάθε $\lambda\in\mathbb{K}$) με οποιοδήποτε σημείο $X=(x_1,...,x_n)^T\in\mathbb{K}^n$:

$$X+Y=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)^T \text{ και } \lambda\cdot X=(\lambda\, x_1,...,\lambda\, x_n)^T \quad (\mathbb{K}=\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}).$$

Μπορέσαμε έτσι να παρουσιάσουμε κάποιες καινούργιες αλγεβρικές έννοιες, και, με την λογιστική ευχέρεια που μας παρείχαν, να προχωρήσουμε στην ευκολότερη κατανόηση της φύσης και της συμπεριφοράς των Ευκλείδειων υποσυνόλων που μένουν αμετάβλητα ως προς αυτήν την πρόσθεση και ως προς αυτόν τον πολλαπλασιασμό.

Γενικά, στα σύγχρονα Μαθηματικά, υπάρχουν πολλά άλλα σύνολα που κάνουν την εμφάνιση τους σε κρίσιμα περιβάλλοντα. Για παράδειγμα, υπάρχει συχνά ανάγκη θεώρησης συνόλων, όπως:

- $C(I)$= *το σύνολο των (πραγματικών ή μιγαδικών) συναρτήσεων που είναι συνεχείς σ' ένα διάστημα* $I\subseteq\mathbb{R}$,
- $C(E)$= *το σύνολο των μιγαδικών συναρτήσεων που είναι συνεχείς σ' ένα υποσύνολο* E *του επιπέδου* $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$,
- $C^1(\Omega)=$ *το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων* f *μέσα σ' ένα ανοικτό υποσύνολο* Ω *του επιπέδου, των οποίων οι μερικές παράγωγοι* $1^{ης}$ *τάξης είναι όλες συνεχείς στο* Ω,
- $P(\mathbb{R}^n)=$ *το σύνολο των πραγματικών πολυωνυμικών συναρτήσεων του* $\mathbb{R}^n$:

$$p(x_1,\dots,x_n)=\sum_{v_1=0}^{m_1}\dots\sum_{v_n=0}^{m_n} a^{(p)}_{v_1,\dots,v_n}\, x_1^{v_1}\dots x_n^{v_n}$$

με $a^{(p)}_{v_1,\dots,v_n}\in \mathbb{R}$,

- $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^n)=$ *το σύνολο των πραγματικών πολυωνυμικών συναρτήσεων του* $\mathbb{R}^n$, *των οποίων ο βαθμός* $M=m_1+\dots+m_n$ *είναι μικρότερος ή ίσος από το* $N\ (N\geq 0)$,
- $\ell_0=$ *το σύνολο των (πραγματικών ή μιγαδικών) ακολουθιών που συγκλίνουν προς το* 0,
- $\ell^p=$ *το σύνολο των ακολουθιών* $(u_v)=(u_v)_{v\in\mathbb{N}_0}$ *(πραγματικών ή μιγαδικών), που επαληθεύουν την συνθήκη:*

$$\sum_{v=0}^{\infty}|u_v|^p<\infty\quad (0<p<\infty),$$

- $L^p(E)=$ *το σύνολο των συναρτήσεων* $f:E\to\mathbb{R}$, *των οποίων η* $p-$*δύναμη της απόλυτης τιμής τους:* $|f(x)|^p$ *είναι ολοκληρώσιμη μέσα στο* $E\subseteq\mathbb{R}^n$, *ως προς ένα δεδομένο μέτρο,*
- $\Lambda(\mathcal{S})$ *το σύνολο των λύσεων ενός συστήματος* $\mathcal{S}$ *γραμμικών διαφορικών εξισώσεων,*
- $\mathcal{L}_K(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)=\{T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n\ :\ \eta\, T\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mathbb{K}-\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\eta}\}$,

κ.λ.π.

Η ανάγκη θεώρησης τέτοιων συνόλων μας υποχρεώνει να επεκτείνουμε τις έννοιες του διανυσματικού χώρου, της διάστασής του, των βάσεών του, της γραμμικής ανεξαρτησίας ενός συστήματος σημείων του κ. λ. π. σε αφηρημένα σύνολα (, φυσικά, κάτω από την προϋπόθεση ότι θα έχουμε ήδη ορίσει τρόπους πρόσθεσης και αριθμητικού πολλαπλασιασμού μέσα σ' αυτά τα σύνολα).

Έστω V ένα τυχαίο μη κενό σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε δύο πράξεις μεταξύ των στοιχείων του V: σύμφωνα με τη πρώτη, σε κάθε ζεύγος (f,g) στοιχείων του V αντιστοιχεί ένα τρίτο στοιχείο h του V, ενώ, σύμφωνα με την δεύτερη, σε κάθε ζεύγος (λ,f),

με $\lambda \in K$ και $f \in V$, αντιστοιχεί ένα άλλο στοιχείο $u \in V$. Ας συμβολίσουμε την πρώτη πράξη με το σύμβολο της πρόσθεσης $+$ και την δεύτερη με το σύμβολο του πολλαπλασιασμού $\cdot$:

$$+ : V \times V \to V : (f, g) \mapsto f + g \quad \text{και} \quad . : K \times V \to V : (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f .$$

Θα λέμε ότι το στοιχείο $f + g(= h)$ είναι το ***άθροισμα*** των f και g, ενώ το στοιχείο $\lambda \cdot f(= u)$ είναι το ***αριθμητικό γινόμενο*** του λ με το f. Για να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση, σε μία τέτοια περίπτωση, γράφουμε $(V, +, \cdot)$ αντί V.

Με μία τέτοια γραφή, υπονοούμε ότι το σύνολο V είναι εφοδιασμένο με την προσθετική πράξη $+$ και με τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό $\cdot$.

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.1.(i). ***Το σύνολο $V = (V, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, υπεράνω του K, εάν οι πράξεις $+$ και $\cdot$ ικανοποιούν τις επόμενες οικείες ιδιότητες της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού:***

(α). $f + g = g + f$, $\forall f, g \in V$ (: ***μεταθετικός νόμος της πρόσθεσης***),

(β). $f + (g + h) = (f + g) + h$, $\forall f, g, h \in V$ (:***επιμεριστικός νόμος της πρόσθεσης***)

(γ). ***υπάρχει μοναδικό στοιχείο του V, που ονομάζεται μηδέν και συμβολίζεται με 0, τέτοιο ώστε***

$$f + 0 = 0 + f = f, \quad \forall f \in V \quad (: \textbf{ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου})$$

(δ). ***για κάθε $f \in V$, υπάρχει μοναδικό στοιχείο V, που ονομάζεται αντίθετο του f και συμβολίζεται με $-f$, τέτοιο ώστε***

$$f + (-f) = (-f) + f = 0, \ \forall f \in V \ (: \textbf{ύπαρξη αντίθετου στοιχείου}),$$

(ε). $1.f = f$, $\forall f \in V$,

(στ). $(\lambda\,\mu)\cdot f = \lambda\cdot(\mu\cdot f),\quad \forall\lambda,\mu\in K$ ***και*** $\forall f\in V$,

(ζ). $\left.\begin{array}{l}\lambda\cdot(f+g)=\lambda\cdot f+\lambda\cdot g,\\ \forall\lambda\in K \text{ και } \forall f,g\in V\end{array}\right\}$ (:***προσεταιριστικοί νόμοι***)

(η). $\left.\begin{array}{l}(\lambda+\mu)\cdot f=\lambda\cdot f+\mu\cdot f,\\ \forall\lambda,\mu\in K \text{ και } \forall f\in V\end{array}\right\}$ (:***προσεταιριστικοί νόμοι***)

(ii). ***Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου, υπεράνω του*** K ***, λέγονται διανύσματα.***

(iii). ***Για λόγους απλοποίησης των συμβολισμών, προτιμάμε να γράφουμε*** $f-g$ ***, αντί*** $f+(-g)$.■

Σαν εφαρμογή των προηγούμενων *Αξιωμάτων (α)* έως *(η)*, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι:

$$\lambda\cdot f=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda=0 \text{ είτε } f=0,$$

$$\lambda\cdot(-f)=(-\lambda)\cdot f=-\lambda\cdot f,\ \forall\lambda\in K \text{ και } \forall f\in V.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι μέσα από τα αξιώματα αυτά εμφανίζεται, κατά πεπλεγμένο πρώτο, η ακόλουθη ιδιότητα που χαρακτηρίζει αλγεβρικά όλους τους διανυσματικούς χώρους:

$$\forall f,g\in V \text{ και } \forall\lambda,\mu\in K \;\Rightarrow\; (\lambda\cdot f+\mu\cdot g)\in V.$$

Έχοντας σαν αφετηρία την ιδιότητα αυτή μπορούμε να γενικεύσουμε δίνοντας τον εξής *Ορισμό*:

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.2.. ***Έστω ο διανυσματικός χώρος*** $V=(V,+,\cdot)$ ***υπεράνω του*** K***. Ένα υποσύνολο*** W ***του*** V ***λέγεται διανυσματικός υπόχωρος του*** V***, υπεράνω του*** K***, εάν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση + και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό . του*** V***, δηλαδή εάν:***

$$\forall f, g \in W \Rightarrow (f+g) \in W$$

και $$\forall \lambda \in K,\ \forall f \in W \Rightarrow (\lambda \cdot f) \in W.$$

(Με άλλα λόγια, εάν $W \subseteq V$ ***και*** $(W,+,\cdot)$ ***είναι διανυσματικός χώρος, υπεράνω του*** K ***, τότε το*** W ***λέγεται διανυσματικός υπόχωρος του V, υπεράνω του*** K ***). Εάν ο*** W ***είναι διανυσματικός υπόχωρος του*** V ***, τότε γράφουμε***

$$W \leq V.$$

Στην περίπτωση που $W \neq V$ ***, γράφουμε απλά***

$$W < V$$

και λέμε ότι το W ***είναι ένας γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του*** V ***, υπεράνω του*** K ***.■***

Έστω τώρα $V = (V,+,\cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του K. Για κάθε υποσύνολο S του V, θεωρούμε τον μικρότερο διανυσματικό υπόχωρο του V:

$$< S >,$$

που περιέχει το S.

Είναι σαφές ότι:

$$< S >= \bigcup \{W : S \subseteq W \leq V\}.$$

Ο διανυσματικός υπόχωρος $< S >$ λέγεται ***γραμμική θήκη*** ή ***γραμμικό παράγωγο του*** S.

Ακόμη, λέμε ότι *το* S ***παράγει γραμμικά το*** $< S >$.

Στην περίπτωση που το *S* είναι ένα πεπερασμένο σύνολο $\{s_1,\ldots,s_k\}$, προτιμούμε να γράφουμε $< s_1,\ldots,s_k >$ αντί $< \{s_1,\ldots,s_k\} >$.

Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.3. *Για κάθε* $S \subseteq V$ *ισχύει:*

$$< S >= \bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} \bigcup_{s_1,\ldots s_k \in S} \{\lambda_1 \cdot s_1 + \ldots + \lambda_k \ s_k : \lambda_1,\ldots, \lambda_k \in \boldsymbol{K}\}.$$

$$= \{\lambda_1 \cdot s_1 + \ldots + \lambda_k \cdot s_k : \lambda_1,\ldots,\lambda_k \in \boldsymbol{K}, s_1,\ldots,s_k \in S \ \text{και} \ k \in \boldsymbol{N}\}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε:

$$M = \{\lambda_1 \cdot s_1 + \ldots + \lambda_k \cdot s_k : \lambda_j \in \boldsymbol{K}, s_j \in S \ \ (j = 1,\ldots,k \ \ \text{και} \ \ k \in \boldsymbol{N})\}.$$

Όπως διαπιστώνεται εύκολα, ισχύει

$$S \subseteq M \leq V.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$< S > \subseteq M.$$

Από την άλλη πλευρά, κάθε διανυσματικός υπόχωρος του V που περιέχει το S πρέπει να περιέχει επίσης και το M. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$< S > \supseteq M.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:

$$< S >= M,$$

και η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι ολοκληρωμένη. ■

Η ένωση μίας οικογένειας $\{W_1,\ldots,W_r\}$ διανυσματικών υπόχωρων του V δεν είναι (γενικά) διανυσματικός υπόχωρος του *V*.

Σε μία τέτοια περίπτωση, θεωρούμε τον διανυσματικό υπόχωρο:

$$\{W_1,\ldots,W_r\},$$

δηλαδή τον πιο μικρό διανυσματικό υπόχωρο του *V* που περιέχει τα $W_1,\ldots,W_r$. Προφανώς, είναι:

$$< W_1,...,W_r >= \cap\{W : W_j \subseteq W \leq V, \quad \textit{για κάθε } j = 1,...,r\}.$$

Ακόμη, μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι:

$$< W_1,...,W_r >=< W_1 \cup ... \cup W_r >= W_1 + ... + W_r,$$

όπου ο διανυσματικός υπόχωρος $W_1 + ... + W_r$ είναι το *άθροισμα* των υπόχωρων $W_1,...,W_r$, δηλαδή

$$W_1 + ... + W_r = \{w_1 + ... + w_r : w_j \in W_j, \quad \textit{για κάθε } j = 1,...,r\}.$$

Εάν, επί πλέον,

$$W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1} + W_{j+1} + ... + W_r) = \{0\} \qquad \forall j = 1,...,r,$$

το άθροισμα $W_1,...,W_r$ ονομάζεται ***ευθύ άθροισμα*** των $W_1,...,W_r$ και συμβολίζεται με:

$$W_1 \oplus . . . . \oplus W_r.$$

Έτσι, ειδικότερα, το άθροισμα $W_1 + W_2$ είναι ευθύ εάν $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Θα προχωρήσουμε, στην συνέχεια, στην γενίκευση των εννοιών της βάσης και της διάστασης.

Δοθέντων των στοιχείων $f_1,...,f_k$ του V, τότε κάθε διάνυσμα $f \in V$ που γράφεται υπό την μορφή:

$$f = \lambda_1 \cdot f_1 + ... + \lambda_k \cdot f_k \text{ (για κάποια } \lambda_1,...,\lambda_k \in K\text{)}$$

καλείται ***γραμμικός συνδυασμός*** *των* $f_1,...,f_k$.

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.4.. ***Έστω*** S ***ένα υποσύνολο του διανυσματικού χώρου*** $V = (V,+,\cdot)$ ***υπεράνω του*** K.

(i). ***Λέμε ότι το*** S ***είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο ή ότι τα στοιχεία του*** S ***είναι γραμμικά εξαρτημένα, εάν οποιοδήποτε στοιχείο του*** S ***γράφεται σαν γραμμικός***

συνδυασμός των υπολοίπων. Με άλλα λόγια, εάν υπάρχουν $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in K$ ***, όχι όλα ίσα με μηδέν, και*** $f_1,\ldots,f_m \in S$ ***τέτοια ώστε:***

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_m \cdot f_m = 0 \quad (\in V).$$

(Αποδεικνύεται εύκολα ότι, σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει $f \in S$ **με:**

$$f \in < S - \{f\} > .$$

Και αντιστρόφως, εάν υπάρχει $f \in S$ **με** $f \in S < S - \{f\} >$ **, τότε το σύνολο** S **είναι γραμμικά εξαρτημένο. Κατ' ισοδύναμη διατύπωση:**

$$\text{“ } S : \gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\alpha}\ \varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu o \Leftrightarrow \exists f \in S :< S >=< S - \{f\} > \text{ ”.)}$$

(ii). Λέμε ότι το S ***είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ή ότι τα στοιχεία του*** S ***είναι γραμμικά ανεξάρτητα, εάν δεν υπάρχει στοιχείο του*** S ***που να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Με άλλα λόγια, εάν κάθε σχέση της μορφής:***

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_m \cdot f_m = 0 \quad (\in V),$$

με $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in K$ ***και*** $f_1,\ldots,f_m \in V$ ***, συνεπάγεται ότι*** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ **.**

(Αποδεικνύεται εύκολα ότι το S **είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν:**

$$f \notin < S - \{f\} > \quad \forall f \in S,$$

ή ισοδύναμα εάν:

$$\forall f \in S \Rightarrow < S - \{f\} > \neq < S > .) \blacksquare$$

Παρατηρήστε πως όταν το σύστημα S είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $V = (V,+,\cdot)$ τότε απαραίτητα θα είναι:

$$0 \notin S .$$

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.5.(i). ***Ένα υποσύνολο B του $V=(V,+,\cdot)$ καλείται βάση του V, εάν :***

(α). ***το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο,***

και

(β). $V=<B>$.

(ii). ***Λέμε ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης εάν είναι γραμμικό παράγωγο ενός πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του. Στην αντίθετη περίπτωση, θα λέμε ότι ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος άπειρης διάστασης.*** ■

Σε ό,τι ακολουθήσει, θα ενδιαφερθούμε μόνον για διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Πρόταση ΙΙΙ.2.1.6. ***Κάθε διανυσματικός χώρος V υπεράνω του K, που είναι πεπερασμένης διάστασης περιέχει μία πεπερασμένη βάση*** **(δηλαδή μία βάση με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων).**

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $f_1,\ldots,f_r$ παράγουν τον χώρο V, με την έννοια ότι:

$$V=<f_1,\ldots,f_r>.$$

Εάν τα $f_1,\ldots,f_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε, σύμφωνα με τον προηγούμενο Ορισμό, το σύστημα $\{f_1,\ldots,f_r\}$ είναι μία βάση του V.

Εάν τα $f_1,\ldots,f_r$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, τότε υπάρχει ένα από αυτά, έστω το f_r, τέτοιο ώστε:

$$< f_1,\dots,f_r >=< f_1,\dots,f_{r-1} > .$$

Επειδή, όπως υποθέσαμε πιο πάνω, $V =< f_1,\dots,f_r >$, βλέπουμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$V =< f_1,\dots,f_{r-1} > .$$

Εάν υπάρχει ανάγκη, η διαδοχική επανάληψη αυτού του επιχειρήματος θα οδηγήσει στην θεώρηση ενός συστήματος $\{f_1,\dots,f_j\}$, $\mu\varepsilon$ $j \le r-1$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει τον V , δηλαδή που είναι μία βάση του V . ■

Το πρόβλημα που εγείρεται, κατά φυσικό τρόπο τώρα, συνίσταται στην διερεύνηση της δυνατότητας εμπλουτισμού ενός τυχαίου γραμμικού συστήματος προκειμένου το νέο σύστημα να αποτελεί μία βάση.

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί απαντάει σ' αυτό το πρόβλημα.

Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.7. ***Έστω*** $\{f_1,\dots,f_r\}$ ***μία βάση του διανυσματικού χώρου*** V ***υπεράνω του*** K ***. Εάν*** $\{g_1,\dots,g_s\}$ ***είναι ένα οποιοδήποτε άλλο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του*** V ***, τότε:***

(i). $s \le r,$

(ii). ***υπάρχουν*** $(r-s)$ ***στοιχεία*** $f_{j_{s+1}}, f_{j_{s+2}},\dots,f_{j_r}$ ***της βάσης*** $\{f_1,\dots,f_r\}$ ***τέτοια ώστε το σύστημα:***

$$\{g_1,\dots,g_s, f_{j_{s+1}},\dots,f_{j_r}\}$$

να είναι μία άλλη βάση του V **. (Πιο επεξηγηματικά, υπάρχει μία αρίθμηση**

$$j : \{s+1, s+2,\dots,r\} \to \{s+1, s+2,\dots,r\} : a \mapsto j_a$$

των δεικτών των στοιχείων της βάσης τέτοια ώστε το σύστημα:

$$\{g_1,\dots,g_s, f_{j_{s+1}},\dots,f_{j_r}\}$$

να είναι άλλη μία βάση του V **.)**

Απόδειξη. Επειδή τα στοιχεία $f_1,\ldots,f_r$ παράγουν τον *V*, έχουμε:

$$g_1 = \lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_r \cdot f_r ,$$

για κάποια $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \boldsymbol{K}$ κατάλληλα επιλεγμένα.

Ακόμα, επειδή το σύστημα $\{g_1,\ldots,g_s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, το διάνυσμα g_1 πρέπει να είναι διαφορετικό από το μηδέν και, κατά συνέπεια, ένας ανάμεσα από τους συντελεστές $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0$.

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την παρακάτω σχέση:

$$f_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot g_1 + (-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}) \cdot f_2 + \ldots + (-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}) \cdot f_r .$$

Αυτή η ισότητα σημαίνει ότι το διάνυσμα f_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $g_1, f_2,\ldots,f_r$ και επομένως:

$$< f_1,\ldots,f_r > = < (g_1, f_2,\ldots,f_r), f_2,\ldots,f_r > = < g_1, f_2,\ldots,f_r >$$

Καθώς μάλιστα $V = < f_1,\ldots,f_r >$, θα ισχύει ότι:

$$V = < g_1, f_2, f_3,\ldots,f_r > .$$

Διαδοχική επανάληψη αυτού του επιχειρήματος, αποδεικνύει ότι:

$$\begin{aligned} V &= < g_1, g_2, f_3,\ldots,f_r > \\ &= < g_1, g_2, g_3, f_4,\ldots,f_r > \\ &= < g_1, g_2,\ldots,g_s, f_{s+1},\ldots,f_r > . \end{aligned}$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι τα διανύσματα $g_1, g_2,\ldots,g_s, f_{s+1},\ldots,f_r$ είναι, κατ' ανάγκη, γραμμικά ανεξάρτητα, συμπεραίνουμε το τέλος της *Απόδειξης* του *Θεωρήματος*. ■

Οι κύριες ιδιότητες των βάσεων ενός διανυσματικού χώρου $V=(V,+,\cdot)$ υπεράνω του K συγκεντρώνονται στο *Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.8*.

Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.8. ***Έστω $V=(V,+,\cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος, υπεράνω του K, με πεπερασμένη διάσταση.***

(i). ***Δύο οποιεσδήποτε βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.***

(ii). ***Εάν B είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:***

(α). ***Το B είναι μία βάση του V.***

(β). ***Εάν $S\subset B$ και $S\neq B$, τότε $<S>\neq V$.***

(Η *Πρόταση* αυτή σημαίνει ότι το *Β* είναι ένα *ελάχιστο* σύνολο ως προς την ιδιότητα παραγωγής του V: δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του *Β* που μπορεί να παράγει τον V.)

(γ). ***Εάν $B\subset S$ και $S\neq B$, τότε το S είναι γραμμικά εξαρτημένο.***

(Η *Πρόταση* αυτή σημαίνει ότι το B είναι ένα *μέγιστο* σύνολο ως προς την ιδιότητα της γραμμικής ανεξαρτησίας μέσα στο V: δεν υπάρχει γνήσιο υπερσύνολο του B που μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο V.)

(iii). ***Οποιοδήποτε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V μπορεί να εμπλουτισθεί με πρόσθετα στοιχεία του V έτσι ώστε το νέο εμπλουτισμένο σύνολο να συνιστά μία βάση του V.***

Απόδειξη. (i). Εάν τα συστήματα $\{f_1,\dots,f_r\}$ και $\{q_1,\dots,q_s\}$ είναι δύο βάσεις του V, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο *Θεώρημα* $r\leq s$ και $s\leq r$, οπότε $r=s$.

(ii). $\underline{(a)\Rightarrow(\beta)}$ Έστω $B=\{f_1,...,f_r\}$ μία βάση του V. Έστω επίσης ένα υποσύνολο S του B που περιέχει s (διάφορα ανά δύο) στοιχεία, με $s\le r$, και που παράγει ολόκληρο τον διανυσματικό χώρο V.

Σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.7.(i)*, θα πρέπει επίσης να ισχύει $r\le s$, γεγονός που δείχνει ότι $s=r$. Επομένως, το S πρέπει να ταυτίζεται με το B, δηλαδή $S=B$.

$\underline{(a)\Rightarrow(\gamma)}$ Έστω $B=\{f_1,...,f_r\}$ μία βάση του V. Έστω επίσης ένα γραμμικό ανεξάρτητο σύστημα S μέσα στο V, τέτοιο ώστε $B\subset S$.

Εάν $card(S)$ είναι ένας συμβολισμός για το πλήθος των διάφορων στοιχείων του *S*, τότε μία ευθεία εφαρμογή του προηγούμενου *Θεωρήματος* βεβαιώνει ότι $card(S)\le r$.

Από την άλλη πλευρά, καθώς $S\supset B$, ισχύει $card(S)\ge r$. Άρα, $card(S)=r$, ισότητα που εγγυάται την ταύτιση των B και S.

$\underline{(\beta)\Rightarrow(a)}$ Εάν ένα σύνολο $B(\subset V)$ είναι ελάχιστο ως προς την ιδιότητα της γραμμικής παραγωγής, τότε η απόδειξη της *Πρότασης ΙΙΙ.2.1.6* οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το B πρέπει να είναι μία βάση του V.

$\underline{(\gamma)\Rightarrow(a)}$ Εάν ένα σύνολο $S(\subset V)$ είναι μέγιστο ως προς την ιδιότητα της γραμμικής ανεξαρτησίας, τότε δεν είναι δυνατή η διόγκωσή του χωρίς την απώλεια της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του V που βρίσκεται έξω από το S ανήκει υποχρεωτικά στην γραμμική θήκη $<S>$ του S.

Συνεπώς, θα είναι $(V-S)\subset<S>$.

Επειδή όμως προφανώς είναι και $S\subset<S>$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το S είναι μία βάση του V.

(iii). Πρόκειται για μία άμεση συνέπεια του *Θεωρήματος ΙΙΙ.2.1.7.* ■

Μετά από το αποτέλεσμα *(i)* του προηγούμενου *Θεωρήματος*, οδηγούμαστε στον εξής *Ορισμό*:

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.9. ***Έστω*** $V=(V,+,\cdot)$ ***ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του*** K***. Υποθέτουμε ότι ο*** V ***είναι πεπερασμένης διάστασης. Το πλήθος των στοιχείων μίας οποιασδήποτε βάσης του*** V ***(είναι σταθερό και) ονομάζεται διάσταση του*** V***. Θα συμβολίζουμε την διάσταση του*** V ***με***

$$\dim_K V \text{ ή απλά } \dim V$$

εφόσον δεν υπάρχει αμφιβολία περί της εκλογής του συνόλου K***.***

Εάν $K=R$ ***τότε ο αριθμός*** $\dim_R V$ ***λέγεται πραγματική διάσταση του*** V***, ενώ εάν*** $K=C$ ***τότε ο αριθμός*** $\dim_C V$ ***λέγεται μιγαδική διάσταση του*** V***. Η διάσταση του τετριμμένου διανυσματικού χώρου*** $\{0\}$ ***είναι*** (**κατά σύμβαση**) ***ίση με*** 0***.***■

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των ιδιοτήτων της έννοιας της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου, παραθέτουμε ένα *Λήμμα* που θα χρειαστούμε.

Λήμμα ΙΙΙ.2.1.10. ***Έστω*** V ***ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του*** K ***πεπερασμένης διάστασης. Εάν*** X ***είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του*** V***, τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένας διανυσματικός υπόχωρος*** Y ***του*** V ***τέτοιος ώστε***

$$X \oplus Y = V.$$

Απόδειξη. Εάν $\{f_1,\ldots,f_s\}$ είναι μία βάση του X και εάν $\{g_1,\ldots,g_r\}$ είναι μία βάση του V, τότε τα διανύσματα $f_1,\ldots,f_s$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα (αλλάζοντας στην ανάγκη την αρίθμηση των δεικτών των g_j) τότε το σύνολο $\{f_1,\ldots,f_s,g_{s+1},\ldots,g_r\}$ είναι μία βάση του V.

Θέτοντας $Y:=<g_{s+1},\ldots,g_r>$, βλέπουμε ότι $X\oplus Y=V$. ■

Στο επόμενο αποτέλεσμα, ο διανυσματικός χώρος $V=(V,+,\cdot)$ μπορεί να είναι άπειρης διάστασης.

Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.11. ***Ας υποθέσουμε ότι οι διανυσματικοί υπόχωροι M και N του V είναι πεπερασμένης διάστασης.***

(i). ***Εάν*** $M\le N$, ***τότε*** $\dim M\le \dim N$ ***εάν*** $\dim M=\dim N$ ***τότε*** $M=N$.

(ii). ***Οι διανυσματικοί υπόχωροι $M+N$ και $M\cap N$ είναι πεπερασμένης διάστασης και οι διαστάσεις τους συσχετίζονται από τον ακόλουθο Τύπο (γνωστό ως Τύπο του Grassmann):***

$$\dim(M+N)+\dim(M\cap N)=\dim M+\dim N.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του ισχυρισμού *(i)* είναι άμεση συνέπεια του *Θεωρήματος ΙΙΙ.2.1.8*.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού *(ii)*,μπορούμε να δεχτούμε ότι:

$\{f_1,\ldots,f_r\}$ είναι μία βάση του $M\cap N$,
$\{f_1,\ldots,f_r,g_1,\ldots,g_s\}$ είναι μία βάση του M,
$\{f_1,\ldots,f_r,h_1,\ldots,h_t\}$ είναι μία βάση του N.

(Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εάν W είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V, με $dimW<\infty$, τότε κάθε βάση του W επεκτείνεται σε μία βάση του V.) Προφανώς ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\dim(M \cap N) = r, \quad \dim M = r + s \quad \text{και} \quad \dim N = r + t.$$

Εάν καταφέρουμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\{f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου $M + N$ του V, τότε είναι σαφές ότι θα έχουμε αποδείξει το *Θεώρημα*.

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι, επειδή το σύνολο $\{f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t\}$ παράγει γραμμικά τον $M + N$, είναι αρκετό να δείξουμε ότι τα διανύσματα $f_1, \ldots, f_r, g_1 \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Γι' αυτό, ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε σχέση της μορφής:

$$a_1 \cdot f_1 + \ldots + a_r \cdot f_r + \beta_1 \cdot g_1 + \ldots + \beta_s \cdot g_s + \gamma_1 \cdot h_1 + \ldots + \gamma_t \cdot h_t = 0$$

(όπου $a_1, \ldots, a_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \in K$ και 0 είναι το μηδενικό στοιχείο του V).

Αυτή η σχέση γράφεται ισοδύναμα με την μορφή:

$$\gamma_1 \cdot h_1 + \ldots + \gamma_t \cdot h_t = (-a_1) \cdot f_1 + \ldots + (-a_r) \cdot f_r + (-\beta_1) \cdot g_1 + \ldots + (-\beta_s) \cdot g_s .$$

Το αριστερό μέρος της τελευταίας εξίσωσης είναι ένα στοιχείο του N, ενώ το δεξιό μέρος είναι ένα στοιχείο του M.

Άρα, και τα δύο μέρη της εξίσωσης είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου

$$M \cap N.$$

Αλλά, καθώς τα $f_1, \ldots, f_r$ δεν εξαρτώνται γραμμικά από τα $h_1, \ldots, h_r$, βλέπουμε ότι το αριστερό μέρος της πιο πάνω εξίσωσης θα πρέπει να ισούται με 0 και συνεπώς:

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0 .$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι και το δεξιό μέρος της εξίσωσης αυτής πρέπει να είναι ίσον με 0***, πράγμα που συνεπάγεται ότι:***

$$a_1 = \ldots = a_r = \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$$

χάρη στην γραμμική ανεξαρτησία του συστήματος $\{f_1,\ldots,f_r,g_1,\ldots,g_s\}$. Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι τώρα ολοκληρωμένη. ■

Πόρισμα ΙΙΙ.2.1.12. ***Το άθροισμα $M+N$ δύο διανυσματικών υπόχωρων M και N του V είναι ευθύ εάν και μόνον εάν:***

$$\dim(M+N)=\dim M+\dim N.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, θα είναι:

$$\dim(M\oplus N)=\dim M+\dim N.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.2.1.11*, έχουμε:

$$\dim(M+N)+\dim(M\cap N)=\dim M+\dim N.$$

Έτσι:

$$\dim(M+N)=\dim M+\dim N$$

εάν και μόνον εάν:

$$\dim(M\cap N)=0,$$

δηλαδή εάν και μόνον εάν:

$$M\cap N=\{0\}.\ ■$$

Υπάρχουν πολλοί διανυσματικοί χώροι στους οποίους μπορούμε να εισάγουμε νόρμες, δηλαδή έννοιες που γενικεύουν την έννοια της απόλυτης τιμής αριθμού του K.

Αυτή η δυνατότητα επιτρέπει την θεώρηση μετρικών επιχειρημάτων σε αυτούς τους χώρους, με αποτέλεσμα να υπάρχει ευχέρεια έρευνας των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων των μερών τους.

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.13. ***Μία νόρμα στον διανυσματικό χώρο*** V ***υπεράνω*** K ***είναι μία απεικόνιση:***

$$\phi : V \to [0,+\infty[$$

με τις εξής ιδιότητες:

(i). $\phi(x) \geq 0$ ***και*** $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii). $\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y)$,

(iii). $\phi(\lambda \cdot x) = |\lambda|\, \phi(x)$,

για κάθε $x \in V, y \in V,\ \lambda \in K$. ■

Έχουν εμφανισθεί παραδείγματα που πιστοποιούν ότι ο εφοδιασμός τυχαίου διανυσματικού χώρου με νόρμα δεν είναι σίγουρος.

Εάν όμως $V = (V,+,\cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του K και εάν υπάρχει η δυνατότητα εισαγωγής κάποιας νόρμας ϕ στον V, τότε για κάθε δύο στοιχεία x και y του V μπορούμε να ορίσουμε την απόστασή τους (ως προς την νόρμα ϕ) σαν τον μη αρνητικό αριθμό $\phi(x-y)$.

Έτσι, θα λέμε ότι *μία ακολουθία* $(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(\nu)}, \ldots)$ *στοιχείων του* V ***συγκλίνει*** *προς το* $y \in V$ *ή το y είναι το* ***όριο της ακολουθίας***, ως προς τη νόρμα ϕ, εάν:

$$\lim_{\nu \to \infty} \phi(x^{(\nu)} - y) = 0.$$

Θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς εάν η απεριόριστη ελάττωση των αποστάσεων μεταξύ των σημείων της ακολουθίας μπορεί να εξασφαλίσει την σύγκλισή της προς ένα σημείο του V.

Η απάντηση είναι γενικά αρνητική. Εάν όμως η αδιάκοπη σμίκρυνση των αποστάσεων των όρων οποιασδήποτε ακολουθίας εγγυάται την σύγκλισή της μέσα στον V, τότε έχουμε ένα *φαινόμενο πληρότητας* του διανυσματικού χώρου και λέμε ότι *ο* V *είναι ένας* ***χώρος Banach***.

Δεν πρόκειται να υπεισέλθουμε σε μία ενδελεχή μελέτη των διανυσματικών χώρων με νόρμα, γιατί δεν είναι αυτό το αντικείμενο που πραγματεύεται το παρόν σύγγραμμα. Θα επισημάνουμε μόνο ότι στην πράξη οι διανυσματικοί χώροι με νόρμα που συνήθως εμφανίζονται είναι σύνολα συναρτήσεων και ότι η αναζήτηση των ιδιοτήτων τους αποτελεί το κεντρικό κεφάλαιο του σχετικά νέου κλάδου των Μαθηματικών που λέγεται ***Συναρτησιακή Ανάλυση***.

Οι εφαρμογές αυτών των ιδιοτήτων έχουν δώσει επεξηγηματικές λύσεις σε πάρα πολλά προβλήματα και για αυτό η σύγχρονη Μαθηματική Ανάλυση και Έρευνα κατευθύνεται σημαντικά από την υποστήριξη και την ανάπτυξη συναρτησιακο-αναλυτικών μεθόδων.

Στην συνέχεια, θα ενδιαφερθούμε μόνον για τον διανυσματικό χώρο:

$$\mathcal{L}_K(K^n, K^n) = \{T : K^n \to K^n : T \text{ είναι } K\text{-γραμμική απεικόνιση}\}.$$

Κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}_K(K^n, K^n)$ αναπαρίσταται από έναν και μόνο έναν τετραγωνικό πίνακα με *n* γραμμές και *n* στήλες. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας (στοιχείων του K) αναπαριστά ένα μέλος του $\mathcal{L}_K(K^n, K^n)$ Με άλλα λόγια, το σύνολο $\mathcal{L}_K(K^n, K^n)$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία του K. Με δεδομένα τα όσα αναφέρθηκαν στα *Εδάφια Ι.1* και *Ι.2*, τα δυο αυτά σύνολα ταυτίζονται αλγεβρικά. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε νόρμες στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων (με στοιχεία του K), παρατηρώντας ότι το σύνολο $\mathcal{L}_K(K^n, K^n)$ ταυτίζεται, με το Καρτεσιανό γινόμενο $K^n \times K^n$, και χρησιμοποιώντας κάποιες νόρμες του K^n που γενικεύουν την Ευκλείδεια νόρμα του K^n.

Ορισμός ΙΙΙ.2.1.14. ***Έστω*** $0 < p < \infty$. ***Σε κάθε*** $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in K^n$ ***αντιστοιχούμε τον μη αρνητικό αριθμό:***

$$H_p(z) := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Εάν $p = \infty$, ***τότε θέτουμε:***

$$H_\infty(z) := \max_{1 \le j \le n} |z_j|.$$

Οι αριθμοί $H_p(z)$ ***και*** $H_\infty(z)$ ***ονομάζονται νόρμες Hölder του z.***■

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε πως:

$H_p(z) \ge 0$ και $H_p(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $H_\infty(z) \ge 0$ και $H_\infty(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$H_p(z+w) \le H_p(z) + H_p(w)$, $H_\infty(z+w) \le H_\infty(z) + H_\infty(w)$

$H_p(\lambda \cdot z) = |\lambda| \, H_p(z)$, $H_\infty(\lambda \cdot z) = \lambda \, H_\infty(z)$

για κάθε $z \in K^n, w \in K^n, \lambda \in K$ και $0 < p < \infty$, και άρα οι απεικονίσεις:

$$H_p : K^n \to [0, +\infty[\quad , \quad H_\infty : K^n \to [0, +\infty[,$$

είναι στα αλήθεια νόρμες του K^n.

Ακόμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως ιδιαίτερα η νόρμα Hölder $H_2(z)$ του $z \in K^n$ ταυτίζεται με την Ευκλείδεια νόρμα ||z|| του *z*, ενώ η νόρμα Hölder $H_1(z)$ του $z \in K^n$ αντιπροσωπεύει την νόρμα της κατά μέσο όρο σύγκλισης.

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε ότι ***δύο οποιεσδήποτε νόρμες του*** K^n ***είναι ισοδύναμες***, δηλαδή διατηρούν αναλλοίωτες τις οριακές ιδιότητες των υποσυνόλων του K^n. Έτσι, δύο οποιεσδήποτε νόρμες του K^n έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες, με την έννοια του εάν κάποια ακολουθία σημείων του K^n συγκλίνει στο $y \in K^n$ ως προς κάποια νόρμα του K^n, τότε το y είναι όριο της ακολουθίας ως προς οποιαδήποτε άλλη νόρμα του K^n. Ειδικά για τις νόρμες Hölder έχουμε τις:

III.2.2. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ HOLDER

Θεώρημα III.2.2.1. *Για κάθε* $z=(z_1,\dots,z_n)^T\in K^n, w=(w_1,\dots,w_n)^T\in K^n$ *είναι:*

(i). $\left|\sum_{j=1}^n z_j\cdot w_j\right|\le H_p(z)\,H_q(w)\qquad (1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1),$

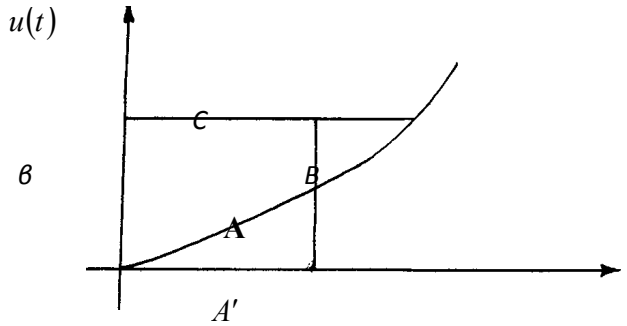
(ii). $n^{-\frac{1}{p}}.H_p(z)\le n^{-\frac{1}{q}}.H_q(z)\qquad (p<q<\infty),$

(iii). $H_q(z)\le H_p(z)\qquad (p<q).$

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε την βοηθητική συνάρτηση:

$$u:[0,+\infty[\to[0,+\infty[:t\mapsto u(t)=t^{p-1}$$

για $1<p<\infty$. Η γραφική παράσταση της u είναι η ακόλουθη:



Είναι προφανές ότι:

$$\text{εμβαδόν } (OAA')=\frac{a^p}{p}\quad \text{και}\quad \text{εμβαδόν } (OBB')=\frac{\beta^q}{q}$$

με:

$$q=\frac{p}{p-1}\Leftrightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

γιατί $t=u^{q-1}$.

Ακόμη, έχουμε ότι *εμβαδόν* $(OA'CB') = a\ \beta$. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$a\ \beta \le \frac{a^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Θέτοντας:

$$a := \frac{|z_j|}{H_p(z)} \quad \text{και} \quad \beta := \frac{|w_j|}{H_q(w)},$$

η τελευταία ανισότητα γράφεται υπό την μορφή:

$$\frac{|z_j\ w_j|}{H_p(z)\ H_q(w)} \le \frac{|z_j|^p}{p\ (\sum_{j=1}^n |z_j|^p)} + \frac{|w_j|^q}{q\ (\sum_{j=1}^n |w_j|^q)}.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες για $j = 1,2,\ldots,n,$ βρίσκουμε:

$$\frac{\sum_{j=1}^n |z_j w_j|}{H_p(z)\ H_q(w)} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

που αποδεικνύει την *Ανισότητα (i)* του *Θεωρήματος*.

Έστω τώρα ότι $p < q < \infty$.

Θέτουμε

$$p := \frac{q}{\mu},$$

για κάποιο $\mu > 1$ και έχουμε ότι:

$$\frac{1}{n}|z_j|^p = \frac{1}{n}|z_j|^{\frac{q}{\mu}} = \left(\frac{1}{n}|z_j|^q\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\mu}},$$

οπότε χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς:

$$\frac{1}{\mu'} = 1 - \frac{1}{\mu}, \qquad u_j = \frac{1}{n}|z_j|^q \qquad \text{και} \quad v_j = \frac{1}{n}$$

παίρνουμε:

$$\frac{1}{n}\left|z_j\right|^P = u_j^{\frac{1}{\mu}}\, v_j^{\frac{1}{\mu'}}.$$

Η *Ανισότητα (i)* τότε δίνει:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\mu}}\, v_j^{\frac{1}{\mu'}} \le \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^{\frac{\mu}{\mu}}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{\frac{\mu'}{\mu'}}\right)^{\frac{1}{\mu'}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\mu'}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

από όπου προκύπτει η ανισότητα:

$$\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^p n^{-\frac{1}{\mu}}\, n^{-\frac{1}{\mu'}} \le n^{-\frac{p}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

ή ισοδύναμα, η ανισότητα:

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^p \le n^{-\frac{p}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^q\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Εάν λάβουμε την $p-$ οστή ρίζα των δυο μελών της τελευταίας σχέσης, καταλήγουμε στην *Ανισότητα (ii)* του *Θεωρήματος*.

Τέλος, θέτουμε:

$$y_j = \frac{\left|z_j\right|}{H_p(z)} \quad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Επειδή $y_j \ge 0$ και $\sum_{j=1}^{n} y_j^p = 1,$ είναι:

$$y_j \le 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n),$$

οπότε, καθώς $p < q$, βεβαιωνόμαστε ότι:

$$y_j^q \le y_j^p \quad (j = 1,2,\ldots,n) \Rightarrow \sum_{j=1}^n y_j^q \le \sum_{j=1}^n y_j^p = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n y_j^q = \frac{\sum_{j=1}^n |z_j|^q}{H_p^q(z)} \le 1,$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

III.2.3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΝΟΡΜΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ας θεωρήσουμε δύο Ευκλείδειους διανυσματικούς χώρους υπεράνω του $\mathbb{K}$, τον $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένο με την νόρμα ϕ και τον $\mathbb{K}^m$, εφοδιασμένο με την νόρμα ψ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Έστω το σύνολο $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ όλων των $\mathbb{K}$-γραμμικών απεικονίσεων του $\mathbb{K}^n$ μέσα στο $\mathbb{K}^m$.

Όπως έχουμε δει στο πρώτο *Κεφάλαιο*, στο σύνολο αυτό ορίζονται πρόσθεση και αριθμητικός πολλαπλασιασμός έτσι ώστε το $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ να είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Εάν $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ θέτουμε:

$$r(z) := \frac{\psi(T(z))}{\phi(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{K}^n - \{0\}.$$

Προφανώς, η απεικόνιση $r : \mathbb{K}^n - \{0\} \to [0,+\infty[$ είναι τέτοια ώστε

$$r(\lambda \cdot z) = r(z), \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} \text{ και } z \in \mathbb{K}^n - \{0\}.$$

Ακόμη, αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\mathbb{K}$-γραμμικότητα της απεικόνισης T εξασφαλίζει την συνέχειά της σε κάθε σημείο του $\mathbb{K}^n$ και ότι, με την σειρά της, η συνέχεια της T εγγυάται ότι *η απεικόνιση* $r(z)$ *είναι άνω φραγμένη μέσα στο* $\mathbb{K}^n$–{0}, δηλαδή ότι

υπάρχει $M \geq 0$ *τέτοιο ώστε* $r(z) \leq M$ *για κάθε* $z \in \mathbb{K}^n$.

Έτσι, σε κάθε $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον μη-αρνητικό αριθμό:

$$S_{\phi,\psi}(T) := \sup_{z \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\psi(T(z))}{\phi(z)}.$$

Σύμφωνα με ό,τι προηγήθηκε, ο αριθμός αυτός υπάρχει, κι επί πλέον επαληθεύεται εύκολα ότι *η απεικόνιση:*

$$S_{\phi,\psi} : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to [0,+\infty[: T \mapsto S_{\phi,\psi}(T) = \sup_{z \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\psi(T(z))}{\phi(z)}$$

είναι μία νόρμα στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

Έχοντας υπ' όψη την αλληλουχία της Θεωρίας των Γραμμικών Απεικονίσεων και της Θεωρίας Πινάκων, μπορούμε να ορίσουμε νόρμες στον διανυσματικό χώρο των $m \times n$ πινάκων.

Συγκεκριμένα, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία τα σημεία του $\mathbb{K}$, τότε ο αριθμός:

$$S_{\phi,\psi}(A) := \sup_{z \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\psi(A \cdot z)}{\phi(z)}$$

είναι καλά ορισμένος και ορίζει μία νόρμα στον διανυσματικό χώρο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία τα σημεία του $\mathbb{K}$. *Ο αριθμός* $S_{\phi,\psi}(A)$ *λέγεται μία* ***γεωμετρική νόρμα*** *του Α.*

ΙΙΙ.2.4. ΝΟΡΜΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σύμφωνα με το περιεχόμενο της προηγούμενης *Παραγράφου*, μπορούμε να ορίσουμε νόρμες στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο K, χρησιμοποιώντας τις νόρμες Hölder του K^n.

Ορισμός ΙΙΙ.2.4.1. ***Εάν ϕ είναι μία νόρμα του K^n, τότε οι αριθμοί:***

$$S_\phi(A) = \sup_{z \in K^n - \{0\}} \frac{\phi(A \cdot z)}{\phi(z)}$$

ορίζουν μία νόρμα στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} \in K$. ■

Παραδείγματα ΙΙΙ.2.4.2. ***Έστω $A = (a_{i,j})$ ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία $a_{i,j} \in K$.***

(i). ***Εάν $\phi = H_1$, τότε $S_{H_1}(A) = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$.***

(ii). ***Εάν $\phi = H_2$, τότε $S_{H_2}(A) = [\rho(A^T \cdot A)]^{\frac{1}{2}}$, όπου $\rho(A^T \cdot A)$ είναι η φασματική ακτίνα του $A^T \cdot A$*** (πρ.βλ. *Ορισμό Ι.5.1.2*).

(iii). ***Εάν $\phi = H_\infty$, τότε $S_{H_\infty}(A) = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.*** ■

Στην συνέχεια, θα στραφούμε προς την αναζήτηση συμπληρωματικών στοιχείων σχετικά με το θέμα των νορμών πινάκων. ***Κάθε νόρμα της μορφής $S_\phi(A)$ επί του συνόλου των $n \times n$ πινάκων είναι πολλαπλασιαστική***, γιατί προφανώς ισχύει:

$$\frac{\phi(A\cdot B\cdot z)}{\phi(z)}=\frac{\phi(A\cdot B\cdot z)}{\phi(B\cdot z)}\ \frac{\phi(B\cdot z)}{\phi(z)}\Rightarrow$$
$$S_\phi(A\cdot B)\le S_\phi(A)\ \ S_\phi(B).$$

Ακόμη, μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε νόρμα στο σύνολο των $n\times n$ πινάκων υπάρχει θετικό πολλαπλάσιό της που είναι πολλαπλασιαστική νόρμα. Επίσης, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε πολλαπλασιαστική νόρμα *N* στο σύνολο των $n\times n$ πινάκων υπάρχει μία νόρμα ϕ στο $\boldsymbol{K}^n$ τέτοια ώστε

$$S_\phi(A)\le N(A),\quad \forall A=(a_{i,j})\ \text{ με } a_{i,j}\in\boldsymbol{K}\ .$$

Οι νόρμες S_ϕ είναι οι *"μικρότερες"* ανάμεσα στις πολλαπλασιαστικές νόρμες του διανυσματικού χώρου των $n\times n$ πινάκων.

Πράγματι, εάν ϕ και ψ είναι δύο νόρμες του $\boldsymbol{K}^n$, τότε η πρόταση

$$S_\phi(A)\le S_\psi(A)\quad \forall A=(a_{i,j}):n\times n \text{ πίνακα με } a_{i,j}\in\boldsymbol{K},$$

συνεπάγεται την πρόταση

$$S_\phi=S_\psi.$$

Κατ' ακολουθία, εάν *N* είναι μία πολλαπλασιαστική νόρμα στο σύνολο των $n\times n$ πινάκων και εάν υπάρχει νόρμα ϕ του $\boldsymbol{K}^n$ τέτοια ώστε

$$N(A)\le S_\phi(A)\quad \forall A=(a_{i,j}):n\times n \text{ πίνακας με } a_{i,j}\in\boldsymbol{K}$$

τότε $N=S_\phi$.

Θα αναφερθούμε τώρα στην σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε νόρμες τετραγωνικών πινάκων $A=(a_{i,j})$, με $a_{i,j}\in\boldsymbol{K}$, που είναι της μορφής $S_\phi(A)$ και στις φασματικές τους ακτίνες.

Θυμίζουμε πως εάν $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του τετραγωνικού πίνακα $A=(a_{i,j})$ με $a_{i,j}\in\boldsymbol{K}$, τότε η φασματική ακτίνα του *A* είναι ο αριθμός:

$$\boldsymbol{\rho}(A) = \max_{1\le i\le n} \left|\lambda_j\right|.$$

Έστω λ μία ιδιοτιμή του A και z το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά του. Έστω ϕ μία νόρμα του $\boldsymbol{K}^n$ και έστω S_ϕ η αντίστοιχη πολλαπλασιαστική νόρμα στο σύνολο των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία του $\boldsymbol{K}$.

Επειδή

$$|\lambda|\,\phi(z) = \phi(\lambda\cdot z) = \phi(A\cdot z) \le S_\phi(A)\,\phi(z),$$

θα είναι $|\lambda| \le S_\phi(A)$ για κάθε ιδιοτιμή λ του A, και επομένως:

$$S_\phi(A) \ge \boldsymbol{\rho}(A).$$

Εάν κανείς επιθυμεί μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ότι στην προηγούμενη σχέση, μπορεί ν' αποδείξει ότι ισχύει:

$$S_\phi(A) = [\boldsymbol{\rho}(A^*\cdot A)]^{\frac{1}{2}},$$

όπου A^* είναι ο δυϊκός πίνακας του A, δηλαδή ο ανάστροφος συζυγής πίνακας του *A* (πρ.βλ. *Παράγραφο Ι.2.5*).

Στην ειδική περίπτωση μάλιστα όπου ο *A* είναι ερμιτιανός πίνακας, δηλαδή όταν $A = A^*$, είναι $\boldsymbol{\rho}(A^2) = \boldsymbol{\rho}^2(A)$ και άρα:

$$S_\phi(A) = \boldsymbol{\rho}(A).$$

Τέλος, θα αναφερθούμε στην σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην νόρμα $S_\phi(A)$ ενός τετραγωνικού $n\times n$ πίνακα $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} \in \boldsymbol{K}$ και στην νόρμα $S_\phi(A^{-1})$ του αντίστροφου πίνακα A^{-1} του A (εφόσον αυτός υπάρχει). Ας υποθέσουμε ότι ο A^{-1} υπάρχει.

Όπως ήδη έχουμε ορίσει:

$$S_\phi(A) = \sup_{z\in\boldsymbol{K}^n-\{0\}} \frac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)} = \sup_{z\in\boldsymbol{K}^n-\{0\}} r(z).$$

Θα υπολογίσουμε τον αριθμό

$$\inf_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} r(z)\,.$$

Προς τούτο, θέτουμε $w := A\cdot z$ και αμέσως παίρνουμε:

$$\frac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)} = \frac{\phi(w)}{\phi(A^{-1}\cdot w)} = \frac{1}{\dfrac{\phi(A^{-1}\cdot w)}{\phi(w)}}\,,$$

και καθώς $S_\phi(A^{-1}) = \sup_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} \dfrac{\phi(A^{-1}\cdot w)}{\phi(w)}$, διαπιστώνουμε ότι:

$$\inf_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} \frac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)} = \frac{1}{S_\phi(A^{-1})}\,.$$

Έτσι, συμβολίζοντας με $\gamma_\phi(A)$ τον λόγο:

$$\frac{\inf_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} \dfrac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)}}{\sup_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} \dfrac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)}}\,,$$

βλέπουμε ότι:

$$\gamma_\phi(A) = \frac{1}{S_\phi(A^{-1})\,S_\phi(A)}\,.$$

(Εάν ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε θέτουμε $\gamma_\phi(A) := 0$.)

Είναι άμεση η επιβεβαίωση των ακόλουθων ιδιοτήτων:

$$0 < \frac{1}{S_\phi(A^{-1})} \le \frac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)} \le S_\phi(A) \qquad \forall z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}\,,$$

$0 \le \gamma_\phi(A) \le 1$ και $\gamma_\phi(\lambda\cdot A) = \gamma_\phi(A)$ $\forall \lambda \ne 0$ (γιατί $r(\lambda\cdot x) = r(z)$),

$\gamma_\phi(A^{-1}) = \gamma_\phi(A)$ (γιατί οι ρόλοι των πινάκων A και A^{-1} είναι συμμετρικοί μέσα στον παραπάνω ορισμό του αριθμού $\gamma_\phi(A)$).

ΙΙΙ.2.5. ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ

Για λόγους συγκεντρωτικής ομοιομορφίας, θα επαναλάβουμε χωρίς απόδειξη τα αποτελέσματα της *Παραγράφου Ι.5.5*.

Έστω $A=(a_{i,j})$ ένας $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας με $a_{i,j}\in \mathbf{K}$. Για κάθε $i=1,2,\ldots,n$, θέτουμε:

$$\Lambda_i := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

Τότε, όλες οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται μέσα στην ένωση των δίσκων:

$$\overline{\Delta(a_{i,i},\Lambda_i)} = \{z\in \mathbf{C} : \left|z-a_{i,i}\right| \le \Lambda_i\}$$

που έχουν κέντρα τα σημεία $a_{i,i}$ και αντίστοιχες ακτίνες Λ_i (*Θεώρημα Gerschgorin – Hadamard*). Επειδή:

$$\Delta(a_{i,i},\Lambda_i) = \{z\in \mathbf{C} : \left|z-a_{i,i}\right| \le \Lambda_i\} \subset \Delta(0,\left|a_{i,i}\right|+\Lambda_i) = \{z\in \mathbf{C} : \left|z\right| \le \left|a_{i,i}\right|+\Lambda_i\},$$

έπεται ότι:

$$\boldsymbol{\rho}(A) \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

Εάν τώρα D είναι ένας θετικός διαγώνιος $n\times n$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n > 0,$$

τότε η φασματική ακτίνα $\boldsymbol{\rho}(D^{-1}\cdot A\cdot D)$ του πίνακα $D^{-1}\cdot A\cdot D$ και η φασματική ακτίνα $\boldsymbol{\rho}(A)$ του πίνακα A είναι ίσες.

Εάν εφαρμόσουμε όσα προηγήθηκαν αυτή τη φορά για τον πίνακα $D^{-1}\cdot A\cdot D$, θα πάρουμε:

$$\boldsymbol{\rho}(A) \le \min\{v, v'\},$$

όπου:

$$v = \max_{1\le i\le n}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| x_j}{x_i}\right\} \text{ και } v' = \max_{1\le j\le n}\left\{x_j \sum_{i=1}^{n}\frac{\left|a_{i,j}\right|}{x_i}\right\}.$$

ΙΙΙ.2.6. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός ΙΙΙ.2.6.1. ***Έστω*** $(A^{(k)} : k = 1,2,...)$ ***μία ακολουθία τετραγωνικών*** $n \times n$ ***πινάκων στοιχείων του*** K ***. Έστω επίσης ο τετραγωνικός*** $n \times n$ ***πίνακας*** A ***στοιχείων του*** K ***.***

Θα λέμε ότι η ακολουθία $(A^{(k)} : k = 1,2,...)$ ***συγκλίνει προς τον*** A ***, εάν:***

$$\lim_{k \to \infty} S_{\phi}(A^{(k)} - A) = 0 .$$

Τότε, γράφουμε

$$A^{(k)} \to A \text{ ή ακόμη } \lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A .$$

Θα ερευνήσουμε τώρα τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες προκειμένου η ακολουθία δυνάμεων $(A^m : m = 1,2,...)$ ενός τετραγωνικού πίνακα A να συγκλίνει προς τον A.

Σε μία τέτοια περίπτωση, θα λέμε ότι ***ο πίνακας*** A ***συγκλίνει***.

Όπως είναι ήδη γνωστό από το *Θεώρημα Ι.5.3.1*, για τον τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας T τέτοιος ώστε:

$$T \cdot A \cdot T^{-1} = J ,$$

όπου *J* είναι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα A, που προφανώς εξαρτάται από τα στοιχεία του A:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathrm{O} & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \mathrm{O} & & J_k \end{pmatrix}$$

με:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \mathrm{O} & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & \mathrm{O} & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Το λ_i είναι ιδιοτιμή πολλαπλότητας n_i του πίνακα A:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

και το *n* είναι το μέγεθος του πίνακα A.

Επειδή:

$$J^m = T \cdot A^m \cdot T^{-1} \to A^m = T^{-1} \cdot J^m \cdot T,$$

αρκεί να αναζητήσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την σύγκλιση:

$$J^m \to 0.$$

Είναι εύκολο το να επαληθεύσουμε ότι:

$$J^m = \begin{pmatrix} J_1^m & & & \mathrm{O} \\ & J_2^m & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & J_k^m \end{pmatrix}$$

και άρα $J^m \to 0$ εάν και μόνον εάν $J_i^m \to 0$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,k$.

Ας υπολογίσουμε τον κάθε πίνακα J_i^m.

Έχουμε:

$$J_i^2 = \begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & \mathrm{O} \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & \lambda_i^2 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\lambda_i \\ \mathrm{O} & & & & \lambda_i^2 \end{pmatrix},$$

και γενικότερα, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή:

$$J_i^m = (d_{(k,j),i}^{(m)}),$$

όπου:

$$d_{(k,j),i}^{(m)} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } j < k \\ (j^m - 1)\,\lambda_i^{m-j+k}, & \text{εάν } k \le j \le \max\{n_i, m+k\} \\ 0, & \text{εάν } m+k \le j < n_1. \end{cases}$$

Επομένως:

$$J_i^m \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1 \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,n,$$

κι έτσι αποδείξαμε το:

Θεώρημα ΙΙΙ.2.6.2. $A^m \to 0$ ***εάν και μόνον εάν*** $\rho(A) < 1$. ■

Επιπρόσθετα, ισχύει και το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$S_\phi(J^m) \cong C_m^{n-1} \quad [\rho(J)]^{m-(n-1)} \quad \text{(για αρκετά μεγάλο } m\text{)},$$

όπου:

$$C_m^n := \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

ΙΙΙ.3. ΟΙ ΑΜΕΣΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Έστω ότι δίνεται προς επίλυση το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{array}{l} a_{1,1}\,z_1 + a_{1,2}\,z_2 + \ldots + a_{1,n}\,z_n = \beta_1 \\ a_{2,1}\,z_1 + a_{2,2}\,z_2 + \ldots + a_{2,n}\,z_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}\,z_1 + a_{n,2}\,z_2 + \ldots + a_{n,n}\,z_n = \beta_n \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\ldots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\ldots a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}\ldots a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot z = \beta,$$

με $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $\beta_i \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται κάθε άμεση μέθοδος επίλυσης ενός τέτοιου συστήματος είναι η μετατροπή του σ' ένα ισοδύναμο σύστημα που μπορούμε να λύσουμε εύκολα.

Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι συστημάτων που μπορούμε να λύσουμε εύκολα:

❖ *Τα **τριγωνικά συστήματα**,* δηλαδή εκείνα που ο πίνακας A είναι της μορφής:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathrm{O} & & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & & \mathrm{O} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(στην πρώτη περίπτωση, όπου ο A είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, έχουμε:

$$z_i=\frac{\beta_i-a_{i,i+1}\,z_{i+1}-\ldots-a_{i,n}\,z_n}{a_{i,i}},\ i=n,n-1,\ldots,1,$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση, όπου ο A είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, έχουμε:

$$z_i=\frac{\beta_i-a_{i,1}\,z_1-\ldots-a_{i,i-1}\,z_{i-1}}{a_{i,i}},\quad i=2,3,\ldots,n,$$

με

$$z_1=\frac{\beta_1}{a_{1,1}}).$$

❖ *Τα **συστήματα με ορθογώνιο πίνακα*** A, δηλαδή εκείνα που ο πίνακας A είναι τέτοιος ώστε:

$$A^{-1}=A^T.$$

Τότε

$$z=A^T\cdot\beta\ .$$

Η μετατροπή σε τριγωνικά συστήματα γίνεται με μεθόδους τύπου Gauss, ενώ η μετατροπή σε ορθογώνια συστήματα πραγματοποιείται με την μέθοδο Householder.

III.3.1. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ GAUSS ΚΑΙ CHOLESKY

Οι δύο αυτές μέθοδοι συνίστανται στην γραφή του πίνακα A υπό την μορφή ενός γινομένου δύο πινάκων: $A = L \cdot U$, όπου L είναι ένας πίνακας κάτω τριγωνικός με την κύρια διαγώνιά του κατειλημμένη παντού από τον αριθμό 1 και όπου U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε:

$$L \cdot U \cdot x = \beta \quad \left(x \in \mathbb{R}^n\right),$$

και, στην συνέχεια, επιχειρείται η διαδοχική επίλυση των συστημάτων:

$$L \cdot y = \beta \quad \text{και}$$

$$U \cdot x = y \quad \left(x \in \mathbb{R}^n\right).$$

Θεωρητικά, τα στοιχεία των πινάκων L και U βρίσκονται μετά από ταύτιση των στοιχείων του πίνακα A με εκείνα του γινομένου $L \cdot U$. Αξίζει, επίσης να σημειωθεί το ακόλουθο θεωρητικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα III.3.1.1. ***Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε η διάσπαση***

$$A = L \cdot U,$$

εφόσον υπάρχει, είναι μοναδική.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο τέτοιες διασπάσεις του A:

$$A = L_1 \cdot U_1 = L_2 \cdot U_2.$$

Οι πίνακες L_1 και L_2 είναι αντιστρέψιμοι, γιατί έχουν και οι δύο μοναδική ιδιοτιμή τον αριθμό $\lambda = 1$.

Επειδή ο A είναι επίσης αντιστρέψιμος, έπεται ότι και οι πίνακες U_1 και U_2 είναι αντιστρέψιμοι. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$L_2^{-1} \cdot L_1 = U_2 \cdot U_1^{-1}.$$

Τότε, παρατηρώντας ότι ο πίνακας $L_2^{-1} \cdot L_1$ είναι ένας κάτω τριγωνικός, με την κύρια διαγώνιά του κατειλημμένη παντού από τον αριθμό 1, και ότι ο πίνακας $U_2 \cdot U_1^{-1}$ είναι άνω τριγωνικός, διαπιστώνουμε πως δεν υπάρχει άλλη περίπτωση παρά:

$$L_2^{-1} \cdot L_1 = \mathrm{I} = U_2 \cdot U_1^{-1},$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

Αυτό σημαίνει ότι:

$$L_1 = L_2 \quad \text{και} \quad U_1 = U_2,$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. □

Στην πράξη, κατά την εφαρμογή της ***μεθόδου Gauss***, θέτουμε:

$$A^{(1)} := A \quad \text{και} \quad \beta^{(1)} := \beta,$$

και δημιουργούμε τα εξής ισοδύναμα συστήματα:

$$A^{(r)} \cdot x = \beta^{(r)},\ r = 2,3,\ldots,n$$

με:

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \ldots & a_{1,r}^{(1)} & \ldots & a_{1,n}^{(1)} \\ & a_{2,2}^{(2)} & \ldots & a_{2,r}^{(2)} & \ldots & a_{2,n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & \mathrm{O} & & a_{r,r}^{(r)} & \ldots & a_{r,n}^{(r)} \\ & & & a_{r+1,r}^{(r)} & \ldots & a_{r+1,n}^{(r)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{n,r}^{(r)} & \ldots & a_{n,n}^{(r)} \end{pmatrix}, \quad \beta^{(r)} = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_r^{(r)} \\ \beta_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

και όπου τα στοιχεία των πινάκων $A^{(r)}$ και $\beta^{(r)}$ βρίσκονται από τους *Τύπους*:

$$a_{i,j}^{(r)} = a_{i,j}^{(r-1)} - \frac{a_{i,r-1}^{(r-1)}\, a_{r-1,j}^{(r-1)}}{a_{r-1,r-1}^{(r-1)}}, \qquad i,j = r,\dots,n$$

$$\beta_i^{(r)} = \beta_i^{(r-1)} - \frac{a_{i,r-1}^{(r-1)}\, \beta_{r-1}^{(r-1)}}{a_{r-1,r-1}^{(r-1)}}, \qquad i = r,\dots,n,$$

με όλους τους υπόλοιπους όρους να παραμένουν αμετάβλητοι.

Όταν $r = n$, ο πίνακας $A^{(n)}$ είναι άνω τριγωνικός, και έτσι το τελευταίο ισοδύναμο σύστημα λύνεται αμέσως.

Παρατηρήστε επίσης ότι, σύμφωνα μ' αυτήν την κατασκευή, ισχύει:

$$\det A = \prod_{r=1}^{n} a_{r,r}^{(r)}.$$

Οι αριθμοί $a_{r,r}^{(r)}$ ονομάζονται ***οδηγά στοιχεία***.

Είναι προφανές ότι όλα τα οδηγά στοιχεία πρέπει να είναι διαφορετικά από το μηδέν.

Εάν συμβεί κάποιο από τα οδηγά στοιχεία να είναι ίσο με το μηδέν, τότε μπορούμε να εναλλάξουμε την $r-$γραμμή του συστήματος $A^{(r)} \cdot x = \beta^{(r)}$ με την $l-$γραμμή του ίδιου συστήματος με $l > r$ και $a_{l,r}^{(r)} \neq 0$.

Επίσης, δεν πρέπει οι ποσότητες $\left|a_{r,r}^{(r)}\right|$ να είναι πολύ μικρές, γιατί τότε ο αλγόριθμος θα είναι ασταθής.

Σε μία τέτοια περίπτωση, υπάρχουν δύο τρόποι αντίδρασης:

- *Η* ***μέθοδος της μερικής οδήγησης***, όπου, αφού βρεθεί ο αριθμός $a_{l,r}^{(r)}$ που είναι τέτοιος ώστε $\left|a_{l,r}^{(r)}\right| = \max_{r \le p \le n} \left|a_{p,r}^{(r)}\right|$, εναλλάσσονται η $r-$γραμμή του συστήματος $A^{(r)} \cdot x = \beta^{(r)}$ με την $l-$γραμμή του ίδιου συστήματος.
- *Η* ***μέθοδος της ολικής οδήγησης***, όπου, αφού βρεθεί ο αριθμός $a_{l,r}^{(r)}$ που

είναι τέτοιος ώστε $\left|a_{l,m}^{(r)}\right| = \max_{r \le p,q \le n} \left|a_{p,q}^{(r)}\right|$, εναλλάσσονται η $r-$γραμμή με την $l-$γραμμή και η $r-$στήλη με την $m-$στήλη του συστήματος $A^{(r)} \cdot x = \beta^{(r)}$. Ας σημειωθεί ότι η εναλλαγή των στηλών επιβαρύνει την προσπάθειά μας με την αντίστοιχη εναλλαγή της αρίθμησης των συνιστωσών του άγνωστου διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$.

Η υλοποίηση της μεθόδου Gauss (χωρίς την εμβόλιμη επίκληση των μεθόδων οδήγησης) απαιτεί:

για την τριγωνοποίηση του αρχικού συστήματος:

$\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ διαιρέσεις,

$\dfrac{n^3-1}{3}$ πολλαπλασιασμούς, και

$\dfrac{n^3-n}{3}$ προσθέσεις,

ενώ για την επίλυση του τελικού τριγωνικού συστήματος:

$\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ πολλαπλασιασμούς, και

$\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ προσθέσεις.

Συνολικά, ***η υλοποίηση της πιο απλής εκδοχής της μεθόδου Gauss απαιτεί περίπου*** $\dfrac{2\,n^3}{3}$ ***πράξεις.***

Για να αντιληφθούμε την λειτουργικότητα της μεθόδου Gauss, επισημαίνουμε, χάριν παραδείγματος, ότι για $n=10$ απαιτούνται 700 πράξεις περίπου, ενώ η εφαρμογή της κλασσικής θεωρητικής μεθόδου απαιτεί περίπου 3×10^9 πράξεις).

Η ***μέθοδος Cholesky*** είναι παραλλαγή της μεθόδου Gauss που αφορά αποκλειστικά την περίπτωση που ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Τότε, οι πίνακες L και U είναι ανάστροφοι ο ένας του άλλου, οπότε:

$$A = L \cdot L^T ,$$

με τον πίνακα L να είναι τριγωνικός και αντιστρέψιμος.

Μπορούμε να δείξουμε ότι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, προκειμένου μία τέτοια διάσπαση να υπάρχει, είναι ο πίνακας A να είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τα στοιχεία $\ell_{i,j}$ του *L* υπολογίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\ell_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} , \quad \ell_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} \qquad (i = 2,\ldots,n)$$

και:

$$\ell_{j,j} = (a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (j = 2,\ldots,n)$$

$$\ell_{j,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{i,k} \ \ell_{j,k}}{\ell_{j,j}} \qquad (j = 2,\ldots,n \ \text{ και } i = j+1,\ldots,n).$$

Αφού υπολογισθούν τα στοιχεία του L, επιλύουμε τα εξής δύο τριγωνικά συστήματα:

$$L \cdot y = \beta$$

$$L^{\mathrm{T}} \cdot x = y$$

και προσδιορίζουμε το άγνωστο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήστε ότι

$$\det A = \prod_{j=1}^{\mathrm{n}} \ell_{j,j}^2$$

και ότι εάν ο πίνακας A είναι συμμετρικός, αλλά όχι θετικά ορισμένος, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης j τέτοιος ώστε $\ell_{j,j}^2 < 0$.

Η υλοποίηση της μεθόδου Cholesky απαιτεί:

για την εύρεση των στοιχείων του πίνακα $|L$:

n εξαγωγές τετραγωνικών ριζών,

$\frac{n\,(n-1)}{2}$ διαιρέσεις,

$\frac{n\,(n^2-1)}{6}$ πολλαπλασιασμούς και

$\frac{n\,(n^2-1)}{6}$ προσθέσεις,

ενώ, για την επίλυση των δύο τριγωνικών συστημάτων:

$2\,n$ διαιρέσεις,

$n\,(n-1)$ πολλαπλασιασμούς και

$n\,(n-1)$ προσθέσεις.

Δηλαδή, ***η υλοποίηση της μεθόδου Cholesky απαιτεί συνολικά***

την εξαγωγή n ***τετραγωνικών ριζών***

και

την εκτέλεση περίπου $\frac{n^3}{3}+\frac{5}{6}(3\,n^2-n)$ ***αριθμητικών πράξεων***.

III.3.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ HOUSEHOLDER

Η ***μέθοδος Householder*** έγκειται στην έκφραση του πίνακα A υπό την μορφή γινομένου δύο πινάκων: $A = Q \cdot U$, όπου Q είναι ένας ορθογώνιος πίνακας (δηλαδή τέτοιος ώστε $Q^T = Q^{-1}$) και όπου U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Τότε:

$$A \cdot x = \beta \Leftrightarrow U \cdot x = Q^T \cdot \beta ,$$

και το άγνωστο διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ υπολογίζεται εύκολα σαν λύση του τελευταίου συστήματος. Όπως γίνεται αντιληπτό, το καθοριστικό σημείο στην βασική ιδέα της μεθόδου είναι η δημιουργία του πίνακα Q.

Η κατασκευή αυτού του πίνακα στοιχειοθετείται από την συμμετοχή σ' αυτήν κάποιων στοιχειωδών ορθογώνιων πινάκων H που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

Λήμμα ΙΙΙ.3.2.1. ***Για κάθε $u \in \mathbb{K}^n$, που είναι τέτοιο ώστε $< u / u >= 1$, ο πίνακας:***

$$H = \mathrm{I} - 2 \cdot u \cdot u^T$$

είναι συμμετρικός και ορθογώνιος, και λέγεται στοιχειώδης ορθογώνιος πίνακας.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο πίνακας H είναι συμμετρικός, γιατί:

$$H^T = (\mathrm{I} - 2 \cdot u \cdot u^T)^T = \mathrm{I} - 2 \cdot u \cdot u^T = H .$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$H \cdot H^T = H^2 = \mathrm{I}.$$

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι:

$$H^2 = (\mathrm{I} - 2 \cdot u \cdot u^T)^T = \mathrm{I} - 4 \cdot u \cdot u^T + 4 \cdot u \cdot u^T \cdot u \cdot u^T ,$$

οπότε, επειδή:

$$< u / u >= 1 \Leftrightarrow u^T \cdot u = 1,$$

θα είναι:

$$H^2 = \mathrm{I} - 4 \cdot u \cdot u^T + 4 \cdot u \cdot (u^T \cdot u) \cdot u^T = \mathrm{I} - 4 \cdot u \cdot u^T + 4 \cdot u \cdot u^T = \mathrm{I},$$

και η *Απόδειξη* του *Λήμματος* είναι πλήρης. ■

Θεώρημα ΙΙΙ.3.2.2.. ***Για κάθε διάνυσμα*** $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ***υπάρχει ένας στοιχειώδης ορθογώνιος πίνακας*** H ***και ένας αριθμός*** $a \in \mathbb{R}$ ***τέτοιοι ώστε:***

$$H \cdot y = a \cdot e^{(1)}, \qquad \textbf{\textit{όπου}}\ e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη. Έστω

$$H = \mathrm{I} - 2 \cdot u \cdot u^T$$

ένας στοιχειώδης ορθογώνιος πίνακας που ανταποκρίνεται στις προδιαγραφές του αποτελέσματος του *Θεωρήματος*, και έστω $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$H \cdot y = a \cdot e^{(1)}.$$

Τότε, αφ' ενός θα είναι:

$$\|H \cdot y\|^2 = < H \cdot y / H \cdot y > = < y / H^T \cdot H \cdot y > = < y / y > = \|y\|^2,$$

και αφ' ετέρου:

$$\|H \cdot y\|^2 = < a \cdot e^{(1)} / a \cdot e^{(1)} > = |a|^2,$$

με συνέπεια να ισχύει:

$$\|y\| = |a|.$$

Ακόμη, θέτοντας

$$\mu := 2 < u / y >,$$

βλέπουμε ότι, επειδή:

$$H \cdot y = (\mathrm{I} - 2 \cdot u \cdot u^T) \cdot y = y - 2 < u / y > \cdot u = a \cdot e^{(1)},$$

θα είναι και

$$\mu \cdot u = y - a \cdot e^{(1)},$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με το διάνυσμα $(2 \cdot y)$, θα αποκομίσουμε την σχέση:

$$2\,\mu < y/u >= 2 < y/y > -2\,a < y/e^{(1)} >,$$

ή ισοδύναμα την σχέση:

$$\mu^2 = 2\,a \cdot (a - y^1),$$

όπου y_1 είναι η πρώτη συνιστώσα του διανύσματος y.

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ και δύο πραγματικούς αριθμούς a και μ, έτσι ώστε:

$$|a| = |y|,$$
$$\mu \cdot u = y - a \cdot e^{(1)}$$
$$\mu^2 = 2\,a \cdot (a - y_1).$$

Θέτοντας

$$\lambda := \frac{\mu^2}{v} \text{ και } v := \mu \cdot u,$$

διαπιστώνουμε πως:

$$H = \mathrm{I} - v \cdot v^T / \lambda$$

όπου $a = -(\textit{πρόσημο του } y) \cdot \|y\|$, $\lambda = a\,(a - y_1)$ και $v = y - a \cdot e^{(1)}$. ■

Είμαστε τώρα σε θέση να αναπτύξουμε την μέθοδο Householder.

Θέτουμε:

$$A^{(1)} := A \text{ και } \beta^{(1)} := \beta,$$

και σχηματίζουμε τα $(n-1)$ ισοδύναμα συστήματα:

$$A^{(r)} \cdot x = \beta^{(r)},\ r = 2,3,\ldots,n,$$

με:

$$A^{(r)}=\begin{pmatrix} a_{1,1}^{(2)} & a_{1,2}^{(2)} & \dots & a_{1,r-1}^{(2)} & a_{1,r}^{(2)} & \cdots & a_{1,n}^{(2)} \\ & a_{2,2}^{(3)} & \dots & a_{2,r-1}^{(3)} & a_{2,r}^{(3)} & \cdots & a_{2,n}^{(3)} \\ & \mathrm{O} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & a_{r-1,r-1}^{(r)} & a_{r-1,r}^{(r)} & \cdots & a_{r-1,n}^{(r)} \\ & & & & a_{r,r}^{(r)} & \cdots & a_{r,n}^{(r)} \\ & & \mathrm{O} & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{n,r}^{(r)} & \cdots & a_{n,n}^{(r)} \end{pmatrix} \text{ και } \beta^{(r)}=\begin{pmatrix} \beta_1^{(2)} \\ \beta_2^{(3)} \\ \vdots \\ \beta_{r-1}^{(r)} \\ \beta_r^{(r)} \\ \vdots \\ \beta_n^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Γράφοντας:

$$A^{(r)}=\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(r)} & A_{1,2}^{(r)} \\ \mathrm{O} & A_{2,2}^{(r)} \end{pmatrix} \text{ και } \beta^{(r)}=\begin{pmatrix} c^{(r)} \\ d^{(r)} \end{pmatrix},$$

η μετάβαση από τους πίνακες $A^{(r)}$ και $\beta^{(r)}$ στους πίνακες $A^{(r+1)}$ και $\beta^{(r+1)}$ γίνεται με την βοήθεια ενός στοιχειώδους ορθογώνιου πίνακα

$$H^{(r)}=\mathrm{I}-2\cdot u^{(r)}\cdot[u^{(r)}]^T,$$

τέτοιου ώστε:

$$u_i^{(r)}=0 \quad \text{για κάθε } i=1,\dots,r-1,$$

εφόσον εφαρμοστούν οι *Τύποι*:

$$A^{(r+1)}=H^{(r)}\cdot A^{(r)} \quad \text{και} \quad \beta^{(r+1)}=H^{(r)}\cdot\beta^{(r)}.$$

Προκειμένου να γίνουμε επεξηγηματικότεροι, ας συμβολίσουμε με

$$\tilde{u}^{(r)}$$

το διάνυσμα του $\mathbb{R}^{n-r+1}$ που έχει συνιστώσες:

$$u_r^{(r)},\dots,u_n^{(r)},$$

και με $\widetilde{H}^{(r)}$ τον $(n-r+1)\times(n-r+1)$ πίνακα

$$\widetilde{H}^{(r)} = \mathrm{I} - 2\cdot\widetilde{u}^{(r)}\cdot[\widetilde{u}^{(r)}]^T .$$

Με αυτόν τον συμβολισμό θα είναι:

$$H^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{H}^{(r)} \end{pmatrix}$$

και:

$$A^{(r+1)} = H^{(r)}\cdot A^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{H}^{(r)} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(r)} & A_{1,2}^{(r)} \\ \mathrm{O} & A_{2,2}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(r)} & A_{1,2}^{(r)} \\ \mathrm{O} & \widetilde{H}^{(r)}\cdot A_{2,2}^{(r)} \end{pmatrix},$$

$$\beta^{(r+1)} = H^{(r)}\cdot\beta^{(r)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{H}^{(r)} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c^{(r)} \\ d^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{(r)} \\ \widetilde{H}^{(r)}\cdot d^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα $A^{(r+1)}$ δεν είναι όλα μηδέν. Γι' αυτό, ο πίνακας

$$\widetilde{H}^{(r)}$$

πρέπει να επιλεγεί, σύμφωνα με τα αποτελέσματα του *Λήμματος ΙΙΙ.3.2.1*, έτσι ώστε να μηδενίζει όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα

$$A_{2,2}^{(r+1)}$$

εκτός από ένα.

Από αλγοριθμικής άποψης, η μέθοδος Householder συνοψίζεται στους επόμενους κανόνες:

- ***Κατ' αρχήν, υπολογίζουμε τους αριθμούς:***

$$a_{r,r}^{(r+1)} = -(\text{πρόσημο του } a_{r,r}^{(r)}) \cdot \left(\sum_{i=r}^{n} \left|a_{i.r}^{(n)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda^{(r)} = a_{r,r}^{(r+1)} \left(a_{r,r}^{(r+1)} - a_{r,r}^{(r)}\right),$$

$$\zeta_r^{(r)} = a_{r,r}^{(r)} - a_{r,r}^{(r+1)},$$

$$\zeta_i^{(r)} = a_{i,r}^{(r)}, \quad i = r+1,\ldots,n.$$

- ***Μετά, συνεχίζουμε υπολογίζοντας:***

$$\beta_j^{(r)} = \sum_{i=r}^{n} \zeta_i^{(r)} \, a_{i,j}^{(r)}, \quad j = r+1,\ldots,n,$$

$$\gamma_j^{(r)} = \frac{\beta_j^{(r)}}{\lambda^{(r)}}, \qquad j = r+1,\ldots,n,$$

$$a_{i,j}^{(r+1)} = a_{i,j}^{(r)} - \gamma_j^{(r)} \, \zeta_i^{(r)}, \quad i = r,\ldots,n \quad \text{και} \quad j = r+1,\ldots,n$$

- ***Τέλος, βρίσκουμε τους αριθμούς:***

$$\beta_{n+1}^{(r)} = \sum_{i=r}^{m} \zeta_i^{(r)} \, \beta_i^{(r)},$$

$$\gamma_{n+1}^{(r)} = \frac{\beta_{n+1}^{(r)}}{\lambda^{(r)}},$$

και

$$\beta_j^{(r)} = \beta_i^{(r)} - \gamma_{n+1}^{(r)} \, \zeta_i^{(r)}, \quad i = r,\ldots,n.$$

Το τελευταίο σύστημα εξισώσεων:

$$A^{(n)} \cdot x = \beta^{(n)},$$

που σχηματίζεται, κατ' αυτόν τον τρόπο, θα είναι άνω τριγωνικό και άρα θα επιλύεται εύκολα.

Εξ' άλλου, αποδεικνύεται πως:

$$\det A = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}^{(n)}.$$

Εάν συμπεριλάβουμε και την επίλυση του τριγωνικού συστήματος, η ολοκληρωμένη υλοποίηση της μεθόδου Householder απαιτεί:

$(n-1)$ εξαγωγές τετραγωνικών ριζών,

$\dfrac{4n^3+9n^2-n-12}{6}$ προσθέσεις,

$\dfrac{2n^3+6n^2+4n-12}{6}$ πολλαπλασιασμούς, και

$\dfrac{n^2+3n-2}{2}$ διαιρέσεις.

Συνολικά, δηλαδή, αυτή ***η μέθοδος απαιτεί περίπου διπλάσιες αριθμητικές πράξεις, απ' ότι η μέθοδος Gauss***.

Από την άλλη πλευρά όμως η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα να είναι σταθερή, και να αποκλείει κάθε ενδεχόμενο αστάθειας.

Συμπερασματικά, η μέθοδος Householder δείχνει πώς ένας τυχαίος κανονικός πίνακας *A* μπορεί να γραφεί υπό την μορφή:

$$A = Q \cdot U ,$$

με:

$$Q = H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot \dots \cdot H^{(n-1)} .$$

Όταν ο πίνακας A δεν είναι κανονικός (δηλαδή, δεν είναι αντιστρέψιμος), τότε, κατά την ανάπτυξη της μεθόδου Householder, θα συναντήσουμε υποχρεωτικά κάποιον πίνακα $A^{(r)}$ του οποίου τα $n-r+1$ τελευταία στοιχεία της $n-$οστής στήλης είναι όλα ίσα με μηδέν.

Σε μία τέτοια περίπτωση, θέτουμε

$$H^{(r)} = \mathrm{I}$$

και συνεχίζουμε την διαδικασία τριγωνοποίησης.

Ας σημειώσουμε τέλος πως ***όταν ο πίνακας*** A ***είναι αντιστρέψιμος τότε η διάσπαση***

$$A = Q \cdot U$$

είναι μοναδική.

Παρατηρήσεις ΙΙΙ.3.2.3. (i). Σ' αυτό το *Κεφάλαιο* δεν εξετάσαμε παρά μόνον την περίπτωση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές, γιατί κάθε μιγαδικό σύστημα μπορεί να ανάγεται σε πραγματικό σύστημα διπλάσιας διάστασης.

Πράγματι, κάθε σύστημα της μορφής:

$$(A_1 + i\,A_2)\cdot(x^{(1)} + i\,x^{(2)}) = \beta^{(1)} + i\,\beta^{(2)}$$

γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{pmatrix}.$$

(ii). Ο υπολογισμός του αντίστροφου A^{-1} του A μπορεί να γίνει και με την επίλυση n συστημάτων γραμμικών εξισώσεων:

$$A\cdot x^{(i)} = e^{(i)}, \quad i = 1,\ldots,n,$$

όπου τα διανύσματα $e^{(i)}$ είναι τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Τα διανύσματα $x^{(i)}$ που θα προκύψουν είναι οι στήλες του A^{-1}.

(iii). Εξαιτίας των σφαλμάτων στρογγύλευσης, το διάνυσμα $x^{(1)}$, που θα προκύψει μετά την αριθμητική επίλυση του συστήματος

$$A\cdot x = \beta,$$

δεν θα είναι αυστηρά ίσο με την αληθινή λύση x του συστήματος. Θα έχουμε δηλαδή ένα διανυσματικό υπόλοιπο της μορφής:

$$A\cdot x^{(1)} - \beta = r^{(1)}.$$

Γράφοντας

$$x^{(1)} = x + \sigma^{(1)},$$

η πιο πάνω ισότητα διατυπώνεται και ως εξής:

$$A\cdot x + A\cdot\sigma^{(1)} - \beta = r^{(1)},$$

και επειδή $A \cdot x = \beta$, το $\sigma^{(1)}$ θα είναι η λύση του συστήματος $A \cdot \sigma^{(1)} = r^{(1)}$.

Όμως, για τον ίδιο λόγο όπως και προηγουμένως, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το διάνυσμα $\sigma^{(1)}$, αλλά ένα άλλο διάνυσμα της μορφής $\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$. Τότε:

$$A \cdot e^{(1)} - r^{(1)} = r^{(2)} \quad \text{και} \quad A \cdot e^{(2)} = r^{(2)},$$

και ούτω καθ' εξής.

Η όλη διαδικασία ονομάζεται ***επαναληπτική διαδικασία του διανυσματικού υπολοίπου***.

Γενικά, μία μόνον επανάληψη είναι αρκετή για να βελτιώσουμε την ακρίβεια του αποτελέσματος, επειδή οι επόμενες επαναλήψεις δεν αποφέρουν κάποιο πρόσθετο ουσιαστικό κέρδος για την επιδιωκόμενη ακρίβεια αποτελέσματος.

(iv). Οι διασπάσεις LU και QU οδηγούν σε μεθόδους υπολογισμού ιδιοτιμών πίνακα.

Συγκεκριμένα οδηγούν στους *αλγόριθμους* LR και QR. (πρ. βλ. τις *Παραγράφους ΙΙ.5.3* και *ΙΙ.5.4* και για θεωρητικά αποτελέσματα, μπορεί να συμβουλευτεί τις *Παραγράφους Ι.6.1*, *Ι.6.2* και *Ι.6.3*.)

(v). Στην μέθοδο Gauss, εάν, μετά από ολική οδήγηση, βρεθεί ότι

$$\left|a_{l,m}^{(r)}\right| = \max_{r \le p,q \le n} \left|a_{p,q}^{(r)}\right| = 0,$$

τότε πρέπει να συμπεράνουμε ότι ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος (γιατί

$$\det A = \prod_{r=1}^{n} a_{r,r}^{(r)} = 0),$$

σε αντίθεση με τις άλλες μεθόδους όπου ένα μηδενικό οδηγό στοιχείο δεν συνεπάγεται την μη αντιστρεψιμότητα του πίνακα A.

(vi). Στην απόδειξη του *Θεωρήματος ΙΙΙ.3.2.2*, επιλέξαμε την τιμή του a που καθιστά μέγιστο το λ, για λόγους σταθερότητας, αφού το λ βρίσκεται συχνά σε παρονομαστές. ■

ΙΙΙ.4. ΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΙΙΙ.4.1. ΓΕΝΙΚΑ

Στην παρούσα *Παράγραφο* θα δώσουμε τον ορισμό κάποιων βοηθητικών εννοιών και την παρουσίαση ορισμένων χρήσιμων αποτελεσμάτων.

Ορισμός ΙΙΙ.4.1.1.. ***Ένας οποιοσδήποτε πίνακας*** $A=(a_{i,j})$ ***λέγεται μη αρνητικός, εάν:***

$$a_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \forall j \, .$$

Τότε, γράφουμε $A \geq 0$. ***Ειδικότερα, γράφουμε*** $A=0$, ***εάν:***

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \forall j \, .$$

Όμοια, ένας οποιοσδήποτε πίνακας $A=(a_{i,j})$ ***λέγεται θετικός, εάν:***

$$a_{i,j} > 0 \quad \forall i \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \forall j \, . \blacksquare$$

Ορισμός ΙΙΙ.4.1.2.. ***Ένας οποιοσδήποτε πίνακας*** $A=(a_{i,j})$ ***καλείται αγώγιμος, εάν υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης*** P ***τέτοιος ώστε:***

$$P \cdot A \cdot P^T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \mathrm{O} & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

όπου οι πίνακες $A_{1,1}$ ***και*** $A_{1,2}$ ***είναι τετραγωνικοί.*** $\blacksquare$

Ορισμός ΙΙΙ.4.1.3.. *Ας υποθέσουμε ότι ο τετραγωνικός πίνακας A διασπάται σε δύο τετραγωνικούς πίνακες M και N έτσι ώστε:*

$$A = M - N.$$

*Η διάσπαση αυτή ονομάζεται **κανονική**, εάν:*

ο M είναι κανονικός πίνακας,

$M^{-1} \geq 0,$ *και*

$N \geq 0.$ ■

Θεώρημα ΙΙΙ.4.1.4. ***(Perron – Frobenius)*** *Εάν Α είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε ο ισχυρισμός:*

« $A \geq 0$ και A : ανάγωγος (: όχι αγώγιμος)»

συνεπάγεται ότι:

(i). *Ο A έχει μία μη αρνητική ιδιοτιμή, που ισούται με την φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του A,*

(ii). *Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι θετικό,*

(iii). *Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ αυξάνεται όταν ένα οποιοδήποτε στοιχείο του πίνακα A αυξάνεται,*

(iv). *Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του A είναι μία απλή ιδιοτιμή του A.* ■

Θεώρημα ΙΙΙ.4.1.5.. *Εάν ο τετραγωνικός πίνακας* $A=(a_{i,j})$ *είναι τέτοιος ώστε:*

$$a_{i,j} \le 0 \quad \forall i \ne j,$$

τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i). *Ο* A *είναι κανονικός και* $A^{-1} \ge 0$,

(ii). *Οι διαγώνιοι όροι του* A *είναι θετικοί και ο πίνακας:*

$$B = \mathrm{I} - D^{-1} \cdot A$$

είναι μη αρνητικός, ανάγωγος και συγκλίνει. (D *είναι ο διαγώνιος πίνακας, που έχει διαγώνια την διαγώνια του* A). ■

ΙΙΙ.4.2. ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΙ

Έστω *A* ένας τετραγωνικός πίνακας. Ας υποθέσουμε ότι:

$$A \ge 0 \quad \text{και} \quad A: \text{ανάγωγος.}$$

Έστω επίσης k το πλήθος των ιδιοτιμών του A των οποίων η απόλυτη τιμή ισούται με την φασματική ακτίνα $\boldsymbol{\rho}(A)$ του A.

Ορισμός ΙΙΙ.4.2.1. *Εάν* $k=1$, *ο πίνακας* A *λέγεται πίνακας παράγων. Εάν* $k>1$, *ο πίνακας* A *λέγεται πίνακας κυκλικός τάξης* k. ■

Στη περίπτωση όπου ο A είναι κυκλικός τάξης k, οι ιδιοτιμές που έχουν απόλυτη τιμή ίση με $\boldsymbol{\rho}(A)$ ισούνται με:

$$\lambda_j = \boldsymbol{\rho}(A)\ e^{\frac{2\pi j}{k}},\ \ j = 0,1,\ldots,k-1.$$

Ισχύουν οι επόμενες τρεις ιδιότητες:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.2.2.(i). $A > 0 \Rightarrow A$: ***παράγων.***

(ii). A : ***παράγων*** $\Rightarrow A^m$: ***παράγων*** $\forall m > 0$.

(iii). $A \geq 0$ ***και*** $A^m > 0\ \ \forall m > 0 \Leftrightarrow A$: ***παράγων.*** ■

Δεν θα δώσουμε κάποια απόδειξη του *Θεωρήματος*, γιατί μία τέτοια απόπειρα θα αλλοτρίωνε την εξειδικευμένη κατεύθυνση του συγγράμματος. Αντίθετα, θα γενικεύσουμε τον *Ορισμό ΙΙΙ.4.2.1*.

Ορισμός ΙΙΙ.4.2.3. ***Ένας πίνακας*** A ***(όχι απαραίτητα κυκλικός ή ανάγωγος) λέγεται ασθενώς κυκλικός τάξης*** $k > 1$***, εάν υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας*** P ***τέτοιος ώστε το γινόμενο*** $P \cdot A \cdot P^T$ ***να είναι της μορφής:***

$$P \cdot A \cdot P^T = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \cdots & \cdots & \cdots & A_{1,k} \\ A_{2,1} & \mathrm{O} & & & \vdots \\ & A_{3,2} & \ddots & & \vdots \\ \mathrm{O} & & \ddots & \mathrm{O} & \vdots \\ & & & A_{k,k-1} & \mathrm{O} \end{pmatrix},$$

όπου όλοι οι μηδενικοί υποπίνακες είναι τετραγωνικοί. ■

III.4.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

Έστω ότι δίνεται προς επίλυση το παρακάτω σύστημα n γραμμικών εξισώσεων:

$$A \cdot z = \beta \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_{1,1}\ z_1 + a_{1,2}\ z_2 + \dots + a_{1,n}\ z_n = \beta_1 \\ a_{2,1}\ z_1 + a_{2,2}\ z_2 + \dots + a_{2,n}\ z_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}\ z_1 + a_{n,2}\ z_2 + \dots + a_{n,n}\ z_n = \beta_n \end{matrix}$$

με $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} \in \boldsymbol{K}$, $z_i \in \boldsymbol{K}$, $\beta_i \in \boldsymbol{K}$ (, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ και $i, j = 1,2,\dots,n$).

Ας διασπάσουμε τον πίνακα A, γράφοντάς τον υπό την μορφή:

$$A = M - N,$$

και ***ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος***.

Τότε, το προς επίλυση σύστημα εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$M \cdot z = N \cdot z + \beta.$$

Ορίζοντας την ακολουθία διανυσμάτων $z^{(0)}, z^{(1)}, \dots, z^{(\nu)}, \dots,$ με τον ακόλουθο τρόπο:

- ***το*** $z^{(0)}$ ***είναι αυθαίρετα επιλεγμένο,***
- $M \cdot z^{(\nu+1)} = N \cdot z^{(\nu)} + \beta \Leftrightarrow z^{(\nu+1)} = M^{-1} \cdot N \cdot z^{(\nu)} + M^{-1} \cdot \beta$ $(\nu = 1,2,\dots)$,

έχουμε εισάγει μία γραμμική επαναληπτική διαδικασία, πρώτης τάξης.

Θα επιθυμούσαμε να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση της επαναληπτικής αυτής ακολουθίας προς την μοναδική λύση *z* του συστήματος, δηλαδή θα θέλαμε να ισχύει:

$$lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)} = z\,.$$

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, γνωρίζουμε πως:

$$M\cdot(z^{(\nu+1)}-z) = N\cdot(z^{(\nu)}-z)\,,$$

οπότε θέτοντας

$$\sigma^{(\nu)} := z^{(\nu)} - z \text{ και } B := M^{-1}\cdot N\,,$$

βλέπουμε πως:

$$M\cdot\sigma^{(\nu)} = N\cdot\sigma^{(\nu-1)} \Leftrightarrow \sigma^{(\nu)} = B\cdot\sigma^{(\nu-1)} = \ldots = B^{\nu}\cdot\sigma^{(0)} \quad \forall\nu = 0,1,\ldots$$

Άρα, η σύγκλιση της επαναληπτικής ακολουθίας $z^{(0)}, z^{(1)},\ldots$ προς την λύση *z* του συστήματος εξασφαλίζεται εάν και μόνον εάν ισχύει

$$\boldsymbol{\rho}(B) < 1\,.$$

Δηλαδή, έχουμε το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.3.1. ***Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της επαναληπτικής ακολουθίας*** $z^{(0)}, z^{(1)},\ldots$ ***προς την μοναδική λύση*** z ***του συστήματος γραμμικών εξισώσεων*** $A\cdot z = \beta$ ***είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα*** $B = M^{-1}\cdot N$ ***να είναι μικρότερη του*** 1***:***

$$\boldsymbol{\rho}(B) < 1 \quad (A = M - N)\,.\blacksquare$$

Μία άλλη αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος προέρχεται από το επόμενο:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.3.2. ***Εάν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για την σύγκλιση της επαναληπτικής ακολουθίας $z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots$ προς την μοναδική λύση z του συστήματος γραμμικών εξισώσεων $A \cdot z = \beta$ είναι η σύγκλιση προς το μηδενικό διάνυσμα του K^n της ακολουθίας $(A \cdot z^{(v)} - \beta : v = 0,1,\ldots)$:***

$$\lim_{v\to\infty} r^{(v)} = 0 \quad (r^{(v)} := A \cdot z^{(v)} - \beta).$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε, ισχύουν οι δύο ισότητες:

$$r^{(v)} = A \cdot \sigma^{(v)},$$

$$\sigma^{(v)} = A^{-1} \cdot r^{(v)} \qquad (v = 0,1,\ldots).$$

Έτσι, εάν ϕ είναι μία νόρμα του K^n, θα ισχύουν και οι δύο ανισότητες:

$$\phi(r^{(v)}) \le S_\phi(A)\, \phi(\sigma^{(v)})$$

$$\phi(\sigma^{(v)}) \le S_\phi(A^{-1})\, \phi(r^{(v)}) \qquad (v = 0,1,\ldots).$$

Η πρώτη ανισότητα συνεπάγεται ότι εάν

$$\lim_{v\to\infty} z^{(v)} = z, \text{ (ως προς την νόρμα } \phi\text{)},$$

τότε, επειδή

$$\lim_{v\to\infty} \phi(\sigma^{(v)}) = 0,$$

θα ισχύει ότι

$$\lim_{v\to\infty} r^{(v)} = 0.$$

Αντιστρόφως, από τη δεύτερη ανισότητα έπεται ότι εάν

$$\lim_{v\to\infty} r^{(v)} = 0 \text{ (ως προς την νόρμα } \phi\text{)},$$

τότε θα ισχύει

$$\lim_{\nu\to\infty} \phi(\sigma^{(\nu)}) = 0\,,$$

δηλαδή

$$\lim_{\nu\to\infty} z^{(\nu)} = z \text{ (ως προς την νόρμα } \phi\text{).}$$

Η *Απόδειξη* είναι πλήρης. ■

Η ανισότητα:

$$\phi(\sigma^{(\nu)}) \le S_\phi(A^{-1})\,\phi(r^{(\nu)})$$

περιγράφει ένα απόλυτο άνω φράγμα της νόρμας του σφάλματος.

Πολλές φορές προτιμάμε την προσφυγή στην χρήση ενός άνω φράγματος που σχηματίζεται από μία σύμπραξη της σχετικής εξασθένισης των υπολοίπων $[\phi(r^{(\nu)})/\phi(z^{(\nu)})]$ και του σχετικού σφάλματος $[\phi(\sigma^{(\nu)})/\phi(z^{(\nu)})]$:

Θεώρημα III.4.3.3. ***Για δοθείσα σχετική εξασθένιση των υπολοίπων*** $\eta = [\phi(r^{(\nu)})/\phi(z^{(\nu)})]$***, ο λόγος των ακραίων σχετικών σφαλμάτων ισούται με*** $\gamma_\phi(A)$***, (όπου ο αριθμός*** $\gamma_\phi(A)$ ***ορίσθηκε στην Παράγραφο III.2.4):***

$$\gamma_\phi(A) := \frac{\inf_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} \dfrac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)}}{\sup_{z\in \boldsymbol{K}^n-\{0\}} \dfrac{\phi(A\cdot z)}{\phi(z)}} = \frac{1}{S_\phi(A^{-1})\,S_\phi(A)}.$$

Απόδειξη. Επειδή:

$$\frac{\phi\left(r^{(v)}\right)}{\phi\left(z^{(v)}\right)}=\frac{\phi\left(A\cdot\sigma^{(v)}\right)}{\phi\left(\sigma^{(v)}\right)}\frac{\phi\left(\sigma^{(v)}\right)}{\phi\left(z^{(v)}\right)},$$

βλέπουμε ότι:

$$\left[\phi\left(\sigma^{(v)}\right)/\phi\left(z^{(v)}\right)\right]=\eta\Big/\left[\phi\left(A\cdot\sigma^{(v)}\right)/\phi\left(\sigma^{(v)}\right)\right].$$

Καθώς όμως:

$$\frac{1}{S_{\phi}\left(A^{-1}\right)}\leq\left[\phi\left(A\cdot\sigma^{(v)}\right)/\phi\left(\sigma^{(v)}\right)\right]\leq S_{\phi}(A),$$

διαπιστώνουμε πως:

Ελάχιστο Σχετικό Σφάλμα $=\eta/S_{\phi}(A)$,

Μέγιστο Σχετικό Σφάλμα $\eta\ S_{\phi}\left(A^{-1}\right)$,

κι επομένως:

$$\frac{\text{Ελάχιστο Σχετικό Σφάλμα}}{\text{Μέγιστο Σχετικό Σφάλμα}}=\frac{1}{S_{\phi}\left(A^{-1}\right)S_{\phi}(A)}=\gamma_{\phi}(A),$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι η επιλογή της διάσπασης του πίνακα A του συστήματος διέπεται από τα ακόλουθα τρία βασικά κριτήρια:

1°) ***πρέπει*** $\rho\left(M^{-1}\cdot N\right)<1$,

2°) ***πρέπει η επίλυση του συστήματος*** $M\cdot z=N\cdot z+\beta$ ***να είναι απλή και να απαιτεί όσο το δυνατόν λιγότερες αριθμητικές πράξεις,***

3°) ***πρέπει η φασματική ακτίνα*** $\rho\left(M^{-1}\cdot N\right)$ ***να είναι η μικρότερη δυνατή.***

III.4.4. ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

Στις μεθόδους χαλάρωσης, όπως αυτές έχουν καθιερωθεί, ο πίνακας A του συστήματος δεν διασπάται κατευθείαν σε δύο πίνακες M και $-N$, αλλά, κατ' αρχάς, σε τρεις πίνακες, ως εξής: Εάν

- D είναι ο διαγώνιος πίνακας των διαγώνιων στοιχείων του A:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- $-E$ είναι ο κάτω τριγωνικός υποπίνακας του A:

$$-E = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{2,1} & \ddots & & \mathrm{O} \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

- F είναι ο άνω τριγωνικός υποπίνακας του A:

$$-F = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & a_{n-1,n} \\ & \mathrm{O} & & 0 \end{pmatrix}$$

τότε, προφανώς, έχουμε το ακόλουθο σχήμα για τον πίνακα A:

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$$

και συνεπώς ο A γράφεται υπό την μορφή

$$A = D - E - F\,.$$

Σε δεύτερο στάδιο, δύο απ' αυτούς τους πίνακες συνενώνονται προκειμένου ο A να εκφράζεται σαν διαφορά $A = M - N$.

III.4.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ JACOBI

Η ***μέθοδος Jacobi*** συνίσταται στην ακόλουθη επιλογή:

$$M = D,$$

$$N = E + F.$$

Τότε, ο πίνακας B είναι ο:

$$B = M^{-1} \cdot N = D^{-1} \cdot (E + F),$$

και, επομένως, η επαναληπτική ακολουθία που δημιουργείται είναι η σχηματιζόμενη από την σχέση:

$$z^{(v+1)} = D^{-1} \cdot (E + F) \cdot z^{(v)} + D^{-1} \cdot \beta \quad (v = 0,1,2,...).$$

Αλγοριθμικά, οι συνιστώσες του επαναληπτικού διανύσματος $z^{(v+1)}$ βρίσκονται από τον παραπάνω *Τύπο* και είναι οι εξής:

$$z_i^{(v+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} z_j^{(v)} + \frac{\beta_i}{a_{i,i}} \quad (1 \le i \le n).$$

Γι' αυτό ισχύει, εξ' άλλου, ότι:

$$r_i^{(v)} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j^{(v)} - \beta_i$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} z_j^{(v)} - \beta_i + a_{i,i} z_i^{(v)},$$

απ' όπου έπεται ότι:

$$z_i^{(v+1)} = z_i^{(v)} - \frac{r_i^{(v)}}{a_{i,i}} \text{ και } r_i^{(v+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} r_j^{(v)}.$$

για κάθε $i = 1,2,...,n$.

III.4.6. Η ΜΕΘΟΔΟΣ GAUSS-SEIDEL

Η ***μέθοδος Gauss-Seidel*** συνίσταται στην ακόλουθη επιλογή:

$$M = D - E\,,$$

$$N = F\,.$$

Τότε, ο πίνακας B είναι ο:

$$B = M^{-1} \cdot N = (D - E)^{-1} \cdot F\,,$$

και, επομένως, η επαναληπτική ακολουθία που δημιουργείται είναι η σχηματιζόμενη από την σχέση:

$$z^{(v+1)} = (D - E)^{-1} \cdot F \cdot z^{(v)} + (D - E)^{-1} \cdot \beta \qquad (v = 0,12,...).$$

Αλγοριθμικά, οι συνιστώσες του επαναληπτικού διανύσματος $z^{(v+1)}$ βρίσκονται από τον παραπάνω *Τύπο* και είναι οι εξής:

$$z_i^{(v+1)} = -\frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\; z_j^{(v+1)} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\; z_j^{(v)} + \frac{\beta_i}{a_{i,i}} \quad (1 \le i \le n).$$

Γι' αυτό ισχύει, εξ' άλλου, ότι:

$$r_i^{(v+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\; z_j^{(v+1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\; z_j^{(v)} - \beta_i\,,$$

απ' όπου έπεται ότι:

$$z_i^{(v+1)} = z_i^{(v)} - \frac{r_i^{(v+1)}}{a_{i,i}} \quad \text{και} \quad r_i^{(v+1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}\, r_i^{(v)}$$

για κάθε $i = 1,2,...,n$.

III.4.7. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ JACOBI ΚΑΙ GAUSS-SEIDEL

Έστω $B = (\beta_{i,j})$ ένας πίνακας που διασπάμε σε έναν πίνακα L, που είναι γνήσια κάτω τριγωνικός (δηλαδή που είναι κάτω τριγωνικός και η κύρια διαγώνιά του δεν περιέχει παρά μόνον μηδενικά στοιχεία) και σε έναν πίνακα U, που είναι άνω τριγωνικός, έτσι ώστε:

$$B = L + U .$$

Ορισμός III.4.7.1. ***Ο πίνακας*** $B = (\beta_{i,j})$ ***λέγεται πίνακας Jacobi, εάν***

$$L = D^{-1} \cdot E, U = D^{-1} F \text{ και } \beta_{i,i} = 0 \text{ για κάθε } i ,$$

δηλαδή εάν ισχύει:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & U = D^{-1} \cdot F & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & L = D^{-1} \cdot E & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} . \blacksquare$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τον πίνακα $\mathcal{L}_1$ που ορίζεται από την σχέση:

$$\mathcal{L}_1 = (\mathrm{I} - L)^{-1} \cdot U .$$

Ισχύει το επόμενο *Θεώρημα*:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.7.2. ***(Stein-Rosenberg)*** ***Έστω ότι ο πίνακας Jacobi*** B ***είναι:***

$B \geq 0$ ***και ανάγωγος.***

Τότε, μία και μόνον από τις επόμενες τέσσερις ενδεχόμενες σχέσεις ισχύει υποχρεωτικά:

(i). $\rho(B) = \rho(\mathcal{L}_1) = 0$,

(ii). $0 < \rho(\mathcal{L}_1) < \rho(B) < 1$,

(iii). $\rho(B) = \rho(\mathcal{L}_1) = 1$,

(iv). $1 < \rho(B) < \rho(\mathcal{L}_1)$.

Απόδειξη. Για $\sigma \geq 0$, θέτουμε:

$$m(\sigma) := \rho(\sigma \cdot L + U) \text{ και } n(\sigma) := \rho(L + \sigma \cdot U).$$

Παρατηρώντας ότι:

$$m(0) = n(0) = 0,$$

$$m(1) = n(1) = \rho(L + U) = \rho(B),$$

$$m(\sigma) = \sigma \cdot n(\frac{1}{\sigma}) \text{ για κάθε } \sigma > 0,$$

εφαρμόζουμε το *Θεώρημα Perron-Frobenius* και διαπιστώνουμε ότι οι συναρτήσεις $m(\sigma)$ και $n(\sigma)$ είναι γνησίως αύξουσες καθώς και ότι

$$\rho(B) = 0 \Rightarrow m(\sigma) = n(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \geq 0.$$

Ακόμη, επειδή ο πίνακας B είναι μη αρνητικός και ανάγωγος, είναι

$$(\mathrm{I} - L)^{-1} = \mathrm{I} + L + L^2 + \ldots + L^{n-1},$$

με συνέπεια να ισχύει:

$$\mathcal{L}_1 \geq 0.$$

Άρα, υπάρχει ένα διάνυσμα $x \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$(\mathrm{I} - L)^{-1} \cdot U \cdot x = \lambda \cdot x,$$

για $\lambda = \boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_1) \geq 0$, οπότε έπεται ότι:

$$(\lambda \cdot L + U) \cdot x = \lambda \cdot x \Leftrightarrow (L + \frac{1}{\lambda} \cdot U) \cdot x = x.$$

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι αυτοί οι πίνακες είναι μη αρνητικοί και ανάγωγοι, συμπεραίνουμε ότι:

$$m(\lambda) = \lambda \text{ και } n(\frac{1}{\lambda}) = 1.$$

Έτσι:

(i). Εάν $\boldsymbol{\rho}(B) = 0,$ τότε $m(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \geq 0$, και ειδικότερα $m(\lambda) = 0,$ δηλαδή

$$\lambda = 0 \text{ ή } \boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_1) = 0.$$

(ii). Εάν $\boldsymbol{\rho}(B) = 1$, τότε $n(1) = \boldsymbol{\rho}(B) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ ή $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_1) = 1.$

(iii). Εάν $0 < \boldsymbol{\rho}(B) < 1$, τότε $n(1) = \boldsymbol{\rho}(B) < 1$, κι επειδή

$$n(\frac{1}{\lambda}) = 1,$$

έπεται, από την γνήσια αυξητικότητα της συνάρτησης $n(\sigma)$, ότι:

$$\lambda < 1 \Leftrightarrow \left(\Leftrightarrow 1 < \frac{1}{\lambda} \right).$$

Επί πλέον, επειδή η συνάρτηση $m(\sigma)$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα, κι επειδή $m(1) = \boldsymbol{\rho}(B)$, θα είναι και $0 < \lambda < \boldsymbol{\rho}(B) < 1$ ή:

$$0 < \boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_1) < \boldsymbol{\rho}(B) < 1.$$

(iv). Τέλος, εάν $\boldsymbol{\rho}(B) > 1$, τότε $\lambda = \boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_1) > \boldsymbol{\rho}(B) > 1$. ■

Πόρισμα ΙΙΙ.4.7.3. ***Έστω ότι ο πίνακας Jacobi*** B ***είναι μη αρνητικός και ανάγωγος.***

(i). ***Οι πίνακες*** B ***και*** $\mathcal{L}_1$ ***ή είναι και οι δύο συγκλίνοντες ή είναι και οι δύο αποκλίνοντες.***

(ii). ***Εάν*** $0 < \rho(B) < 1$***, τότε*** $0 < \rho(\mathcal{L}_1) < \rho(B) < 1$. ■

Θεώρημα ΙΙΙ.4.7.4. ***Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας*** $A = (a_{i,j})$ ***του συστήματος γραμμικών εξισώσεων*** $A \cdot z = \beta$ ***είναι αντιστρέψιμος και με γνήσια απόλυτη διαγώνια κυριαρχία, δηλαδή:***

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Τότε, οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel είναι συγκλίνουσες.

Απόδειξη. Μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι ο πίνακας Jacobi $B = (\beta_{i,j})$ του συστήματος είναι τέτοιος ώστε:

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } i = j \\ -\dfrac{a_{i,j}}{a_{i,i}}, & \text{εάν } i \neq j. \end{cases}$$

Άρα, σύμφωνα με την υπόθεση, θα είναι:

$$\sum_{j=1}^{n} |\beta_{i,j}| < 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Έστω τώρα $|B|$ ο πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι οι απόλυτες τιμές των στοιχείων του *B*:

$$|B| = (|\beta_{i,j}|).$$

Τα *Πορίσματα Ι.5.5.3* και *Ι.5.5.4* του *Θεωρήματος Gerschgorin-Hadamard* δείχνουν ότι:

$$\boldsymbol{\rho}(B) < 1,$$

ενώ μία συνέπεια του *Θεωρήματος Perron-Frobenius* είναι ότι:

$$\boldsymbol{\rho}(B) < \boldsymbol{\rho}(|B|).$$

Άρα, $\boldsymbol{\rho}(B) < 1$. Η ανισότητα αυτή φανερώνει ότι, κάτω από τις υποθέσεις του *Θεωρήματος*, η μέθοδος Jacobi συγκλίνει.

Επί πλέον, θεωρώντας την διάσπαση του B:

$$B = L + U,$$

όπου L είναι γνήσια κάτω τετραγωνικός πίνακας και U είναι άνω τριγωνικός πίνακας, και θέτοντας:

$$\mathcal{L}_1 = (\mathrm{I} - L)^{-1} \cdot U,$$

βλέπουμε αμέσως ότι:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_1) \le \boldsymbol{\rho}[(\mathrm{I} - |L|)^{-1} \cdot |U|],$$

κι επειδή μία εφαρμογή του *Θεωρήματος Stein-Rosenberg* δείχνει ότι:

$$\boldsymbol{\rho}[(I - |L|)^{-1} \cdot |U|] < \boldsymbol{\rho}(|B|),$$

συμπεραίνουμε ότι $\boldsymbol{\rho}(B) < 1$, ανισότητα που εγγυάται την σύγκλιση της χαλαρωτικής μεθόδου Gauss-Seidel. ■

III.4.8. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΕΡΧΑΛΑΡΩΣΗΣ

Η ***μέθοδος υπερχαλάρωσης*** συνιστάται, κατ' αρχάς, στην επιλογή:

$$M = \frac{1}{\omega} \cdot (D - \omega \cdot E), \qquad N = \frac{1}{\omega}[(1 - \omega) \cdot D + \omega \cdot F],$$

με $\omega \in \mathbb{K} - \{0\}$.

Τότε, ο πίνακας B είναι:

$$B = M^{-1}N = (D - \omega \cdot E)^{-1} \cdot [(1 - \omega) \cdot D + \omega \cdot F],$$

και οι συνιστώσες του επαναληπτικού διανύσματος $z^{(\nu+1)}$ βρίσκονται από τους *Τύπους*:

$$\tilde{z}_i^{(\nu+1)} = -\frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\, z_j^{(\nu+1)} - \frac{1}{a_{i,i}} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\, z_j^{(\nu)} + \frac{\beta_i}{a_{i,i}}$$

και

$$z_i^{(\nu+1)} = z_i^{(\nu)} + \omega\,[\tilde{z}_i^{(\nu+1)} - z_i^{(\nu)}] = (1-\omega)\, z_i^{(\nu)} + \omega\, \tilde{z}_i^{(\nu+1)}, \quad \text{για} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Η παράμετρος ω λέγεται ***παράγοντας χαλάρωσης***. Όταν $\omega \in \mathbb{R}$ και $\omega < 1$ η μέθοδος λέγεται ***υποχαλαρωτική***, ενώ όταν $\omega \in \mathbb{R}$ και $\omega < 1$ η μέθοδος λέγεται ***υπερχαλαρωτική***. Είναι φανερό πως όταν $\omega = 1$ η χαλαρωτική μέθοδος ταυτίζεται με την μέθοδο Gauss-Seidel.

Θέτοντας, όπως και παραπάνω:

$$L := D^{-1} \cdot E, \quad U := D^{-1} \cdot F \quad (B = L + U),$$

αλλά και:

$$\mathcal{L}_\omega := (\mathrm{I} - \omega \cdot L)^{-1} \cdot [(1-\omega)\cdot \mathrm{I} + \omega \cdot U],$$

$$\ell_\omega := \omega \cdot (\mathrm{I} - \omega \cdot L)^{-1},$$

η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται συνοπτικά από την σχέση:

$$z^{(\nu+1)} = \mathcal{L}_\omega \cdot z^{(\nu)} + \ell_\omega \cdot D^{-1} \cdot \beta \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots,).$$

Στην συνέχεια, θα συζητήσουμε τα κριτήρια επιλογής του κατάλληλου αριθμού ω, έτσι ώστε να διασφαλίσουμε την καλύτερη σύγκλιση της επαναληπτικής ακολουθίας $z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots$ προς την μοναδική λύση του συστήματος $A \cdot z = \beta$.

Είναι φανερό ότι υπάρχουν δύο *Προβλήματα* που εγείρονται προς αυτήν την κατεύθυνση:

Πρόβλημα ΙΙΙ.4.8.1. ***Υποθέτοντας γνωστή την κατανομή των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobi*** B***, να προσδιοριστεί το υποσύνολο*** Ω ***του*** K ***μέσα στο οποίο ισχύει:***

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1 \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

(Το σύνολο Ω **καλείται *τόπος σύγκλισης της μεθόδου*.)**

Πρόβλημα ΙΙΙ.4.8.2. ***Να προσδιοριστεί η τιμή του χαλαρωτικού παράγοντα*** ω **(εφόσον αυτή υπάρχει)** ***που ελαχιστοποιεί το μέγεθος της φασματικής ακτίνας*** $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ ***του*** $\mathcal{L}_\omega$***.***

Το επόμενο *Θεώρημα* δίνει μία μερική απάντηση στο πρώτο *Πρόβλημα*.

Θεώρημα ΙΙΙ.4.8.3. ***Εάν ο πίνακας*** A ***είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, και εάν*** $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$***, τότε:***

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1 \Leftrightarrow \quad 0 < \omega < 2.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, παρατηρούμε ότι $F = E^*$ και ότι ο διαγώνιος πίνακας D είναι θετικά ορισμένος.

Έστω τώρα λ μία ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_\omega$ και έστω $u \in \mathbb{K}^n$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε:

$$\mathcal{L}_\omega \cdot u = \lambda \cdot u \quad \text{ή}$$

$$(D - \omega \cdot E)^{-1} \cdot [\omega \cdot E^* + (1-\omega) \cdot D] \cdot u = \lambda \cdot u \quad \text{ή}$$

$$\omega \cdot E^* \cdot u + (1-\omega) \cdot D \cdot u = \lambda \cdot (D - \omega \cdot E) \cdot u.$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά τα διανύσματα των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης με το ιδιοδιάνυσμα u, λαμβάνουμε:

$$\omega \langle E^* \cdot u / u \rangle = -(1-\omega) \langle D \cdot u / u \rangle + \lambda \langle (D - \omega \cdot E) \cdot u / u \rangle.$$

Από την άλλη πλευρά, επειδή $A = D - E - E^*$, ισχύει:

$$\omega \langle A \cdot u / u \rangle = \omega \langle (D - E) \cdot u / u \rangle - \omega \langle E^* \cdot u / u \rangle.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις, βρίσκουμε ότι:

$$\omega \langle A \cdot u / u \rangle = \omega \langle (D - E) \cdot u / u \rangle + (1-\omega) \langle D \cdot u / u \rangle - \lambda \langle (D - \omega \cdot E) \cdot u / u \rangle$$

ή ισοδύναμα ότι:

$$\omega \langle A \cdot u / u \rangle = (1-\lambda) \langle (D - \omega \cdot E) \cdot u / u \rangle.$$

Καθώς μάλιστα $\overline{\langle E \cdot u / u \rangle} = \langle u / E \cdot u \rangle = \langle E^* \cdot u / u \rangle$, η συζυγής σχέση της τελευταίας φανερώνει ότι:

$$\omega \langle A \cdot u / u \rangle = (1-\overline{\lambda}) \overline{\langle (D - \omega \cdot E^*) \cdot u / u \rangle}$$

ή

$$\omega\,\langle A\cdot u/u\rangle = (1-\overline{\lambda})\,[\langle D\cdot u/u\rangle - \omega\,\langle \overline{E^{*}\cdot u/u}\rangle],$$

γιατί οι πίνακες A και D είναι θετικά ορισμένοι. Όμως, όπως είδαμε πιο πάνω:

$$\omega\,\langle E^{*}\cdot u/u\rangle = -(1-\omega)\,\langle D\cdot u/u\rangle + \lambda\,\langle (D-\omega\cdot E)\cdot u/u\rangle.$$

Μία αντικατάσταση αυτής της σχέσης στην προτελευταία δείχνει ότι:

$$\begin{aligned}\omega\,\langle A\cdot u/u\rangle &= (1-\overline{\lambda})\,[\langle D\cdot u/u\rangle + (1-\omega)\,\langle D\cdot u/u\rangle\,\overline{\lambda}\,\langle \overline{(D-\omega\cdot E)\cdot u/u}\rangle]\\ &= (2-\omega)\,(1-\overline{\lambda})\,\langle D\cdot u/u\rangle - \overline{\lambda}\,(1-\overline{\lambda})\,\langle \overline{(D-\omega\cdot E)\cdot u/u}\rangle,\end{aligned}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(1-\lambda)$ και χρησιμοποιώντας την, από πιο πάνω, γνωστή σχέση:

$$\omega\,\langle A\cdot u/u\rangle = (1-\overline{\lambda})\,\langle \overline{(D-\omega\cdot E)\cdot u/u}\rangle,$$

αντιλαμβανόμαστε πως:

$$\omega\,(1-\lambda)\,\langle A\cdot u/u\rangle = (2-\omega)\,(1-\overline{\lambda})\,(1-\lambda)\,\langle D\cdot u/u\rangle - \overline{\lambda}\,(1-\lambda)\,\omega\,\langle A\cdot u/u\rangle,$$

ή ακόμη, πως:

$$(1-|\lambda|^{2} - 2\,i\,\mathrm{Im}\lambda)\,\langle A\cdot u/u\rangle = (\frac{2-\omega}{\omega})\,|1-\lambda|^{2}\,\langle D\cdot u/u\rangle.$$

Είναι τώρα σαφές ότι επειδή:

$$\left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)|1-\lambda|^{2}\,\langle D\cdot u/u\rangle \in \mathbb{R}$$

και:

$$\langle A\cdot u/u\rangle \in \mathbb{R},$$

θα πρέπει να είναι και $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$, δηλαδή θα πρέπει $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα:

$$(1-|\lambda|^{2})\,\langle A\cdot u/u\rangle = \left(\frac{2-\omega}{\omega}\right)|1-\lambda|^{2}\,\langle D\cdot u/u\rangle.$$

Εάν υποθέσουμε ότι η μέθοδος συγκλίνει, τότε, απαραίτητα, ισχύει $|\lambda| < 1,$ και, καθώς οι πίνακες A και D είναι θετικά ορισμένοι, θα πρέπει:

$$\frac{2-\omega}{\omega} > 0 \quad \text{ή} \quad 2 > \omega > 0.$$

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι

$$2 > \omega > 0,$$

τότε επειδή αποκλείεται να είναι $\lambda = 1$ (αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι

$$\omega \langle A \cdot u / u \rangle = (1-\lambda) \langle (D - \omega \cdot E) \cdot u / u \rangle = 0 \Rightarrow \langle A \cdot u / u \rangle = 0$$

που είναι άτοπο, γιατί ο A είναι θετικά ορισμένος), θα έχουμε ότι

$$(1 - |\lambda|^2) \langle A \cdot u / u \rangle > 0$$

και συνεπώς ότι $|\lambda| < 1,$ που ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

III.4.9.Η ΘΕΩΡΙΑ YOUNG-FRANKEL

Η ***Θεωρία Young-Frankel*** στοχεύει στην αντιμετώπιση των δύο βασικών *Προβλημάτων III.4. 8.1* και *III.4.8.2*.

Αρχίζουμε μία συνοπτική παρουσίαση της Θεωρίας αυτής με την απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.1.(Reich-Ostrowski) ***Έστω B ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, που έχει όλα τα στοιχεία της κύριας διαγώνιας του ίσα με μηδέν.***

Εάν:

$$B = L + U,$$

όπου L είναι ένας γνήσια κάτω τριγωνικός πίνακας και U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, και εάν θέσουμε:

$$\mathcal{L}_\omega := (\mathrm{I} - \omega \cdot L)^{-1} \cdot [(1-\omega) \cdot \mathrm{I} + \omega \cdot U],$$

τότε:

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|,$$

για οποιοδήποτε $\omega \in \mathbb{C} - \{0\}$. Η ισότητα ισχύει εάν και μόνον εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ βρίσκονται στον κύκλο που έχει κέντρο το $0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα ίση με $|\omega - 1|$.

Απόδειξη. Έστω:

$$P(\lambda) = \det(\mathcal{L}_\omega - \lambda \cdot \mathrm{I})$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathcal{L}_\omega$ και έστω $\lambda^{(j)}$ μία ρίζα του.

Επειδή ο πίνακας L είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, ο πίνακας $(\mathrm{I} - \omega \cdot L)$ είναι αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε

$$\det(\mathrm{I} - \omega \cdot L) = 1.$$

Τότε:

$$0 = P(\lambda^{(j)}) = \det(\mathrm{I} - \omega \cdot L)\, \det(\mathcal{L}_\omega - \lambda^{(j)} \cdot \mathrm{I})$$

$$= \det([1 - \lambda - \omega] \cdot \mathrm{I} + \omega\, \lambda \cdot L + \omega \cdot U).$$

Εάν τώρα σ είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(\lambda)$, τότε το σ θα είναι ίσο με το γινόμενο όλων των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathcal{L}_\omega$ και θα προκύπτει εφόσον θέσουμε $\lambda = 0$ στην έκφραση $P(\lambda) = \det(\mathcal{L}_\omega - \lambda \cdot \mathrm{I})$:

$$\sigma = \lambda^{(1)} \ldots \lambda^{(n)} = P(0) = \det([1 - \omega] \cdot \mathrm{I} + \omega \cdot U) = (1 - \omega)^n.$$

Άρα καθώς $\boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_\omega) \geq \left|\lambda^{(j)}\right|$ για κάθε $j = 1,2,\ldots,n,$ θα ισχύει:

$$[\boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_\omega)]^n \geq \left|\lambda^{(1)} \ldots \lambda^{(n)}\right| = |1 - \omega|^n \Rightarrow \boldsymbol{\rho}(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|.$$

Προφανώς η ισότητα στην τελευταία σχέση δεν είναι δυνατή παρά μόνον όταν

$$\left|\lambda^{(1)}\right| = \ldots = \left|\lambda^{(n)}\right| = |\omega - 1|. \blacksquare$$

Έστω τώρα το σύστημα των n γραμμικών εξισώσεων:

$$A \cdot z = \beta \qquad (z \in \boldsymbol{K}^n).$$

Διαμερίζουμε τον πίνακα A σε υποπίνακες, σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \ldots & A_{N,N} \end{pmatrix},$$

όπου τα $A_{i,j}$ είναι υποπίνακες έτσι ώστε οι υποπίνακες $A_{i,i}$ να είναι τετραγωνικοί και αντιστρέψιμοι.

Ορίζουμε τον, κατά υποπίνακες διαμερισμένο, διαγώνιο πίνακα:

$$\widetilde{D} := \begin{pmatrix} A_{1,1} & & & \mathrm{O} \\ & A_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & A_{N,N} \end{pmatrix},$$

και τους κατά υποπίνακες γνήσια τριγωνικούς πίνακες:

$$\widetilde{E} := -\begin{pmatrix} \mathrm{O} & & & \mathrm{O} \\ A_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N-1} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \widetilde{F} := -\begin{pmatrix} \mathrm{O} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathrm{O} & \ddots & A_{N-1,N} \\ & & & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

Προφανώς

$$A = \widetilde{D} - \widetilde{E} - \widetilde{F}$$

και οι πίνακες $\widetilde{D}, \widetilde{E}$ και $\widetilde{F}$ είναι γενικά διαφορετικοί από τους πίνακες D, E και F που ορίσθηκαν παραπάνω.

Επί πλέον, χρησιμοποιώντας αυτούς τους πίνακες, μπορούμε να ορίσουμε χαλαρώσεις κατά υποπίνακες, και όχι πια κατά σημείο.

Έτσι, μεταξύ των άλλων, ορίζουμε τον διαμερισμένο πίνακα Jacobi:

$$\widetilde{B} := -\widetilde{D}^{-1} \cdot A + \mathrm{I} = \widetilde{L} + \widetilde{U}$$

και παρατηρούμε ότι εάν ο $\widetilde{B}$ είναι ένας ασθενώς κυκλικός τάξης $p \geq 2$ πίνακας, τότε και ο πίνακας A είναι ασθενώς $p-$ κυκλικός ως προς την διαμέριση που έχουμε θεωρήσει.

Ορισμός ΙΙΙ.4.9.2. ***Έστω ότι ο πίνακας A είναι $p-$κυκλικός. Λέμε ότι ο A είναι ομοιόμορφα διατεταγμένος, εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα:***

$$\widetilde{B}(a) = a \cdot \widetilde{L} + a^{-(p-1)} \cdot \widetilde{U}$$

είναι ανεξάρτητες από τις τιμές του a $(a \in \mathbb{C} - \{0\})$. ■

Παρατηρήστε πως εάν ο A είναι ομοιόμορφα διατεταγμένος, τότε και ο $\widetilde{B}$ θα είναι μοιόμορφα διατεταγμένος.

Θα χρειαστούμε το επόμενο:

Λήμμα ΙΙΙ.4.9.3. ***Εάν ο διαμερισμένος πίνακας Jacobi $\widetilde{B}$ είναι ομοιόμορφα διατεταγμένος και ασθενώς κυκλικός τάξης p, τότε για οποιεσδήποτε τιμές των μιγαδικών σταθερών a, β και γ ισχύει ότι:***

$$\det(\gamma \cdot \mathrm{I} - a \cdot \widetilde{L} - \beta \cdot \widetilde{U}) = \det(\gamma \cdot \mathrm{I} - [a^{p-1} - \beta]^{\frac{1}{p}} \cdot [\widetilde{L} + \widetilde{U}]).$$

Απόδειξη. Μία άμεση συνέπεια του προηγούμενου *Ορισμού* είναι ότι:

$$\det(\gamma \cdot \mathrm{I} - [a \cdot \widetilde{L} + \beta \cdot \widetilde{U}]) = \prod_{j=1}^{n} \left(\gamma - \sigma_{\mathrm{j}}\right)$$

και:

$$\det(\gamma \cdot \mathrm{I} - [a^{p-1} - \beta]^{\frac{1}{p}} \cdot [\widetilde{L} + \widetilde{U}]) = \prod_{j=1}^{n} \left(\gamma - \tau_j\right),$$

όπου σ_j και τ_j είναι, αντίστοιχα, οι ιδιοτιμές των πινάκων

$$[a \cdot \widetilde{L} + \beta \cdot \widetilde{U}] \text{ και } [a^{p-1} - \beta]^{\frac{1}{p}} \cdot [\widetilde{L} + \widetilde{U}].$$

Εάν κάποιο από τα a και β είναι ίσο με μηδέν, τότε ο πίνακας $a \cdot \widetilde{L} + \beta \cdot \widetilde{U}$ είναι τριγωνικός και συνεπώς, όλες οι ιδιοτιμές σ_j και τ_j είναι ίσες με μηδέν. Εάν κάποιο από τα a και β είναι ίσο με μηδέν, τότε ο πίνακας $a \cdot \widetilde{L} + \beta \cdot \widetilde{U}$ είναι τριγωνικός και συνεπώς, όλες οι ιδιοτιμές σ_j και τ_j είναι ίσες με μηδέν. Εάν, πάλι, τα a και β είναι διαφορετικά από το μηδέν, τότε, θέτοντας:

$$\nu := \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}},$$

λαμβάνουμε:

$$a \cdot \widetilde{L} + \beta \cdot \widetilde{U} = [a^{p-1} - \beta]^{\frac{1}{p}} \cdot [\nu \cdot \widetilde{L} + \nu^{-(p-1)} \cdot \widetilde{U}],$$

κι επειδή το άθροισμα $\widetilde{L} + \widetilde{U}$ είναι ένας ομοιόμορφα διατεταγμένος, *p*-κυκλικός πίνακας μπορούμε να πάρουμε $\nu = 1$, γεγονός που επιτρέπει την εξαγωγή του συμπεράσματος ότι τα σ_j και τ_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ ταυτίζονται.

Η *Απόδειξη* του *Λήμματος* ολοκληρώθηκε. ■

Θα δώσουμε τώρα ένα αποτέλεσμα που φανερώνει την σχέση που υπάρχει μεταξύ των ιδιοτιμών μ του διαμερισμένου πίνακα Jacobi $\widetilde{B}$ και των ιδιοτιμών λ του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$ της υπερχαλάρωσης:

$$\widetilde{B} = \widetilde{L} + \widetilde{U}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\omega = (\mathrm{I} - \omega \cdot \widetilde{L}) \cdot ([1-\omega] \cdot \mathrm{I} + \omega \cdot \widetilde{U}).$$

Προηγουμένως, θα παραθέσουμε, χωρίς απόδειξη, ένα άλλο αποτέλεσμα:

Λήμμα ΙΙΙ.4.9.4. ***(Romanovsky)*** ***Εάν M είναι ένας ασθενώς $k-$κυκλικός πίνακας τότε:***

$$\det(x\cdot \mathrm{I}-M)=x^m\prod_{j=1}^{r}(x^k-\sigma_j^k),$$

όπου σ_j είναι οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του M. ■

Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.5. ***Έστω ότι ο πίνακας A έχει διαμεριστεί σε υποπίνακες. Ας υποθέσουμε, επί πλέον, ότι ο A είναι ομοιόμορφα διατεταγμένος, $p-$κυκλικός και ότι οι υποπίνακές του $A_{i,i}(1\le i\le N)$ είναι αντιστρέψιμοι. Εάν η μη μηδενική ιδιοτιμή λ του πίνακα $\mathcal{L}_\omega$ ικανοποιεί την σχέση:***

$$(\lambda+\omega-1)^p=\lambda^{p-1}\,\omega^p\,\mu^p \qquad (\omega\in K-\{0\})$$

τότε ο αριθμός μ είναι ιδιοτιμή του διαμερισμένου πίνακα Jacobi $\widetilde{B}$. Αντίστροφα, εάν η ιδιοτιμή μ του διαμερισμένου πίνακα Jacobi $\widetilde{B}$ ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, τότε ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$.

Απόδειξη. Οι ιδιοτιμές λ του $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου:

$$\det(\lambda\cdot \mathrm{I}-\widetilde{\mathcal{L}}_\omega)=0\,.$$

Όμως, ο πίνακας $(\mathrm{I}-\omega\cdot\widetilde{L})$ είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς, όπως και στην απόδειξη του *Θεωρήματος Reich-Ostrowski*, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$P(\lambda)=\det[(\lambda+\omega-1)\cdot \mathrm{I}-\lambda\,\omega\cdot\widetilde{L}-\omega\cdot\widetilde{U}]=0,$$

ή ακόμη, μετά από μία εφαρμογή του *Λήμματος ΙΙΙ.4.9.3*, ότι:

$$P(\lambda)=\det[(\lambda+\omega-1)\cdot \mathrm{I}-\lambda^{(p-1)p}\,\omega\cdot\widetilde{B}]=0,$$

Επειδή ο πίνακας A είναι $p-$κυκλικός, το ίδιο θα ισχύει και για τους πίνακες $\widetilde{B}$ και $\lambda^{(p-1)/p}\ \omega\cdot\widetilde{B}$, και για αυτό μία εφαρμογή του *Θεωρήματος Romanovsky* οδηγεί στην διαπίστωση ότι:

$$P(\lambda)=(\lambda+\omega-1)^m\ \prod_{i=1}^{r}\ [(\lambda+\omega-1)^p-\lambda^{p-1}\,\omega^p\ldots\mu_i^p].$$

Έτσι, εάν ο αριθμός μ_i είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{B}$ και εάν ισχύει:

$$(\lambda+\omega-1)^p=\lambda^{p-1}\,\omega^p\,\mu_i^p,\quad \text{με}\quad \mu_i\neq 0\quad ,$$

τότε ο αριθμός λ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$.

Αντιστρόφως, εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός λ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$, τότε θα υπάρχει $i=1,2,\ldots,r$ τέτοιο ώστε:

$$(\lambda+\omega-1)^p-\lambda^{p-1}\ \omega^p\ \mu^p=0.$$

Δεδομένου όμως ότι, από την εκφώνηση του *Θεωρήματος*, έχει υποτεθεί ότι το λ ικανοποιεί ταυτόχρονα και την σχέση:

$$(\lambda+\omega-1)^p-\lambda^{p-1}\,\omega^p\,\mu^p=0.$$

έπεται ότι:

$$\mu=\mu_i\ e^{\frac{2\pi i k}{p}}\qquad \text{για}\quad 0\le k\le p.$$

Καθώς όμως ο πίνακας $\widetilde{B}$ είναι και αυτός $p-$κυκλικός, είναι φανερό πως ο αριθμός μ θα είναι μία ιδιοτιμή του $\widetilde{B}$. Το συμπέρασμα αυτό ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

Πόρισμα III.4.9.6. ***Έστω ότι ο πίνακας A είναι $p-$κυκλικός και ομοιόμορφα διατεταγμένος, με όλους τους υποπίνακες του $A_{i,i}$ αντιστρέψιμους.***

Εάν ο αριθμός μ είναι ιδιοτιμή του $\widetilde{B}$, τότε ο αριθμός μ^p είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathcal{L}_1$. Αντίστροφα εάν ο μη-μηδενικός αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του $\mathcal{L}_1$, και εάν $\mu^p = \lambda$, τότε ο αριθμός μ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{B}$. (Με άλλα λόγια, η κατά υποπίνακες μέθοδος Jacobi συγκλίνει εάν και μόνο εάν, η κατά υποπίνακες, μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει).

Σε μία τέτοια περίπτωση έχουμε:

$$\boldsymbol{\rho}([\mathrm{I}-\widetilde{L}]^{-1}\cdot\widetilde{U}) = \{\boldsymbol{\rho}(B)\}^p = 1. \blacksquare$$

Είμαστε τώρα σε θέση να στραφούμε προς την αντιμετώπιση των δύο βασικών *Προβλημάτων III.4.8.1* και *III.4.8.2* της προηγούμενης *Παραγράφου*.

Κατ' αρχήν, θα επιδιώξουμε να βρούμε ένα εύχρηστο υποσύνολο του τόπου σύγκλισης Ω της υπερχαλαρωτικής μεθόδου.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι $\Omega \subset \mathcal{C}$, και, όπως πιο πάνω, ότι ο πίνακας A είναι ομοιόμορφα διατεταγμένος, $2-$*κυκλικός* και ότι όλοι οι υποπίνακες του $A_{i,i}$ $(1 \le i \le N)$ είναι αντιστρέψιμοι.

Τότε, η θεμελιώδης σχέση του *Θεωρήματος III.4.9.5* είναι η εξής:

$$(\lambda+\omega-1)^2 = \omega^2\,\mu^2\,\lambda,$$

και αντιπροσωπεύει μία απεικόνιση μεταξύ των μιγαδικών $\mu-$ και $\lambda-$ επιπέδων, που μελετάται καλύτερα με την βοήθεια των στοιχειωδών μετασχηματισμών:

$$z = \frac{1}{2}\mu\,(a + \frac{1}{a}), \qquad \text{(M1)}$$

$$\zeta = z + (z^2 - 1), \quad z = \frac{1}{2}\,(\zeta + \frac{1}{\zeta}), \qquad \text{(M2)}$$

$$\lambda = a^2\,\zeta^2, \qquad \text{(M3)}$$

όπου:

$$a \equiv (\omega - 1)^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

(Η περίπτωση $\omega = 1$ μπορεί εύκολα και άμεσα να μελετηθεί, γιατί τότε $\mu^2 = \lambda$.)

Παρατηρήστε ότι, λόγω της σχέσης

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2\,\mu^2\,\lambda,$$

ο πίνακας $\widetilde{B}$ έχει πάντοτε ιδιοτιμές κατά ζεύγη: εάν μ είναι μία ιδιοτιμή του, τότε και το $-\mu$ είναι επίσης ιδιοτιμή του.

Για αυτόν τον λόγο, δεν θα παραστεί ανάγκη αποσαφήνισης του πρόσημου του a, αφού μία αλλαγή του πρόσημου στο a θα ισοδυναμούσε με μία αλλαγή του πρόσημου στο μ. Τώρα, ο μη γραμμικός μετασχηματισμός (M2) έχει τις επόμενες γνωστές ιδιότητες των ***μετασχηματισμών Joukowski***:

1) *Μία έλλειψη E_k στο $z-$επίπεδο, με ημιάξονες*

$$\frac{1}{2}\left|k \pm \frac{1}{k}\right| \quad (1 \geq k \geq 0),$$

απεικονίζεται σε δύο κύκλους του $\zeta-$επιπέδου:

$$|\zeta| = k \quad \textit{και} \quad |\zeta| = \frac{1}{k}.$$

2) *Κάθε εσωτερικό σημείο της έλλειψης E_k απεικονίζεται σε δύο σημεία του δακτυλίου:*

$$k \leq |\zeta| \leq \frac{1}{k}.$$

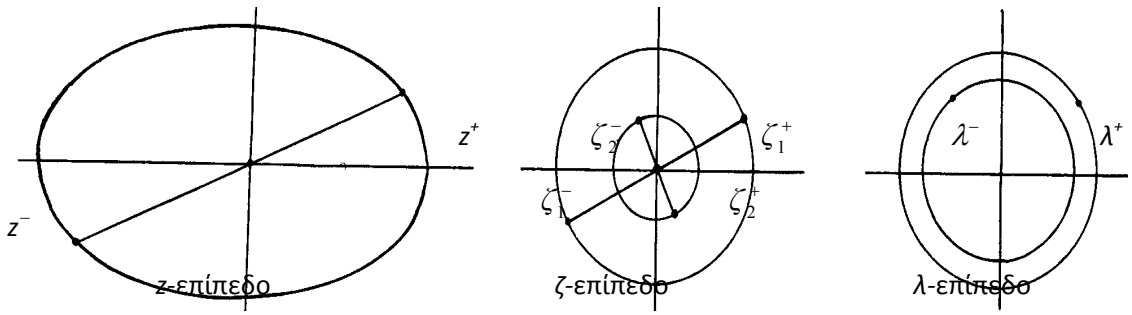
3) *Κάθε σημείο στο εσωτερικό του δακτυλίου* $k \le |\zeta| \le \frac{1}{k}$ *απεικονίζεται σε ένα σημείο στο εσωτερικό της έλλειψης* E_k.

4) *Κάθε σημείο του* $\zeta -$ *επιπέδου που βρίσκεται στο εξωτερικό του δακτυλίου*

$$|k| \le |\zeta| \le \frac{1}{k}$$

(δηλαδή κάθε σημείο του $\zeta -$ επιπέδου που είναι τέτοιο ώστε $|\zeta| > \frac{1}{k}$ ή $|\zeta| < k$) *απεικονίζεται στο εξωτερικό της έλλειψης* E_k.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ζεύγος $\pm\mu$ είναι ένα ζεύγος ιδιοτιμών του πίνακα $\widetilde{B}$. Μέσω του μετασχηματισμού $(\mathrm{M1})$ το ζεύγος αυτό αντιστοιχεί στα δύο σημεία z^+ και z^- του παρακάτω σχήματος.



Τότε υπάρχει μία μοναδική έλλειψη E_k που διέρχεται από τα σημεία z^+ και z^-, και, μέσω του μετασχηματισμού $(\mathrm{M2})$, αυτή η έλλειψη απεικονίζεται σε δύο κύκλους στο μιγαδικό $\zeta -$ επίπεδο, οι οποίοι με την σειρά τους, μέσω του μετασχηματισμού $(\mathrm{M3})$ απεικονίζονται σε δυο κύκλους του μιγαδικού $\lambda -$ επιπέδου. Είναι σαφές ότι τα σημεία

z^+ και z^- απεικονίζονται τελικά στα σημεία λ^+ και λ^-, αντίστοιχα, γεγονός που επιτρέπει την θεώρηση ενός μόνον μέλους από το ζεύγος $\pm\mu$.

Εάν τώρα ορίσουμε την έλλειψη $E(a)$ σαν την έλλειψη του $\mu-$επιπέδου, που έχει ημιάξονες:

$$\frac{\frac{1}{|a|}\pm|a|}{\left|a+\frac{1}{a}\right|}$$

και που ο μεγαλύτερος από αυτούς τους δύο ημιάξονες σχηματίζει γωνία ψ με τον πραγματικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου τέτοια ώστε:

$$\psi = Arctg\frac{1-|a|^2}{1+|a|^2}\ \mathrm{tg}\phi, \qquad a=|a|\,e^{i\phi},$$

τότε η έλλειψη αυτή απεικονίζεται, μέσω του μετασχηματισμού $(\mathrm{M1})$, επί της έλλειψης $E_{|a|}$, κι έτσι έχουμε αποδείξει το:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.7. ***Έστω A ένας ολικά διατεταγμένος 2-κυκλικός πίνακας, τέτοιος ώστε όλοι οι υποπίνακες του $A_{i,i}$ ($i=1,2,\ldots,N$) να είναι αντιστρέψιμοι.***

Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\widetilde{B}$ βρίσκονται στο εσωτερικό της έλλειψης $E(a)$, όπως αυτή ορίστηκε πιο πάνω, και εάν $|\omega-1|<1$, τότε όλες οι ιδιοτιμές λ του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$ έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη από το 1: $|\lambda|<1$ δηλαδή τότε η υπερχαλαρωτική μέθοδος συγκλίνει. Με άλλα λόγια, εάν $\Lambda_{\widetilde{B}}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα $\widetilde{B}$, τότε:

$$\{\omega\in\mathbb{C}:|\omega-1|<1 \text{ και } \Lambda_{\widetilde{B}}\subset \mathrm{E}((\omega-1)^{\frac{1}{2}})\}\subset\Omega.\blacksquare$$

Παρατήρηση ΙΙΙ.4.9.8. Στην Θεωρία του, ο Young μελέτησε την περίπτωση όπου η παράμετρος ω παίρνει μόνον πραγματικές τιμές και μάλιστα μέσα στο κλειστό διάστημα $[1,2]: 1 \le \omega \le 2$ [*1,2*]. Τότε, η $E(\sqrt{\omega - 1})$ ήταν η έλλειψη:

$$x^2 + \frac{y^2}{(\frac{2-\omega}{\omega})} = 1 . \blacksquare$$

Προφανώς, το παραπάνω *Θεώρημα* συνιστά μία γενίκευση του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.8.3*. Θα στραφούμε τώρα προς την αντιμετώπιση του *Προβλήματος ΙΙΙ.4.8.2*, δηλαδή προς την αναζήτηση της βέλτιστης τιμής του χαλαρωτικού παράγοντα ω.

Με άλλα λόγια, θα επιχειρήσουμε να ανακαλύψουμε την τιμή εκείνη του ω που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα **ρ**($\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$) του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$.

Όπως και πριν, θα θεωρήσουμε ότι ο πίνακας A είναι ολικά διατεταγμένος, $2-$κυκλικός και τέτοιος ώστε όλοι οι υποπίνακες του $A_{i,i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ να είναι κανονικοί. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: την περίπτωση όπου το *ω* πρέπει να είναι υποχρεωτικά πραγματικός αριθμός και την περίπτωση όπου το *ω* μπορεί να είναι και μιγαδικός αριθμός.

Ας υποθέσουμε, κατ' αρχήν ότι το $\omega \in \mathbb{R}$. Η τιμή ω_{opt} του ω, που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα **ρ**($\widetilde{\mathcal{L}}_\omega$), είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$\boldsymbol{\rho}^2(\widetilde{B})\, \omega^2 = 4\,(\omega - 1)$$

που είναι μικρότερη από το 2.

Προκειμένου να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.7*, οι ιδιοτιμές λ και μ των πινάκων $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega}$ και $\widetilde{B}$, αντίστοιχα συνδέονται με την σχέση: $(\lambda+\omega-1)^2=\omega^2\,\mu^2\,\lambda$, ή ισοδύναμα με την σχέση:

$$\lambda^2+\lambda\left(2\omega-1-\omega^2\,\mu^2\right)+\left(\omega-1\right)^2=0\,.$$

Άρα:

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\omega^2\,\mu^2-2\,\omega+2\right)\pm\frac{i\,\omega\,\mu}{2}\sqrt{4\,\omega-\omega^2\,\mu^2-4}\,.$$

Το τριώνυμο, ως προς $\omega:\omega^2\,\mu^2-4\,\omega+4$ έχει μόνον πραγματικές ρίζες και η ρίζα εκείνη που είναι μικρότερη από το 2 είναι η:

$$\omega_1=\frac{2}{1+\sqrt{1-\mu^2}}\,.$$

Έτσι, για $\omega>\omega_1$, έχουμε:

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\omega^2\,\mu^2-2\,\omega+2\right)\pm\frac{i\,\omega\,\mu}{2}\sqrt{4\,\omega-\omega^2\,\mu^2-4}\,.$$

Βλέπουμε ότι:

$$\left|\lambda\right|^2=\left(\omega-1\right)^2,\qquad \omega>\omega_1\,.$$

Όταν $\omega<\omega_1$, παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα των δύο μελών της σχέσης: $(\lambda+\omega-1)^2=\omega^2\,\mu^2\,\lambda$, οπότε $\lambda+\omega-1=\lambda^{\frac{1}{2}}\,\omega\,\mu$, και:

$$\lambda^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\omega\,\mu+\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2\,\mu^2-4\,\omega+4}\,,\qquad \frac{d\lambda^{\frac{1}{2}}}{d\omega}=\frac{1-\lambda^{\frac{1}{2}}\,\mu}{2.\lambda^{\frac{1}{2}}-\mu\,\omega}\,.$$

Όμως, όταν $\omega = 0$, έχουμε

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = 1$$

και, επί πλέον, όταν $\omega < \omega_1$ ισχύει

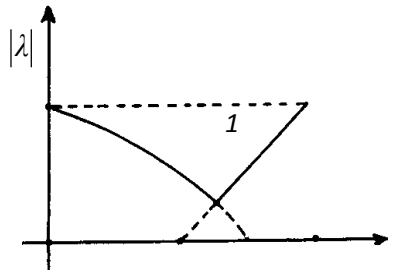
$$2\lambda^{\frac{1}{2}} > \mu\omega,$$

γιατί τότε $\omega^2\mu^2 - 4\omega + 4 > 0$.

Άρα, η συνάρτηση

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}(\omega),$$

είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του ω, όταν $\omega \in [0, \omega_1]$ και συνεπώς η ελάχιστη τιμή του $|\lambda| = |\lambda(\omega)|$ επιτυγχάνεται όταν $\omega = \omega_1$:



Το σκεπτικό αυτό δείχνει ότι επιλέγοντας $\omega = \omega_1$ καταφέρνουμε να ελαχιστοποιήσουμε το $|\lambda|$.

Για να πετύχουμε την ταχύτερη σύγκλιση, πρέπει το $|\lambda|$ να είναι φασματική ακτίνα του $\tilde{\mathcal{L}}_\omega$.

Γι' αυτό πρέπει να επιλέξουμε την κατάλληλη ιδιοτιμή μ του πίνακα $\widetilde{B}$ έτσι ώστε το αντίστοιχο $|\lambda|$ να είναι το μεγαλύτερο δυνατόν.

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι, επειδή για $\omega = \omega_1$, είναι $|\lambda| = \omega_1 - 1$, θα πρέπει να επιλέξουμε το μ έτσι ώστε το ω_1 να είναι μέγιστο.

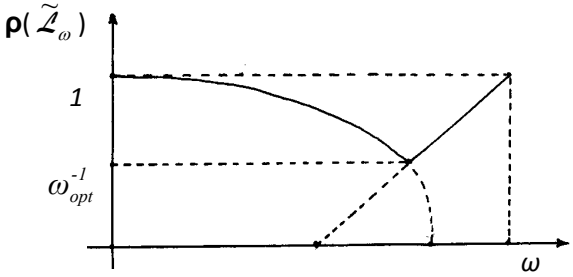
Η μεγιστοποίηση αυτή του ω_1 υλοποιείται εάν επιλέξουμε $\mu = \boldsymbol{\rho}(\widetilde{B})$. Επομένως, τελικά:

$$\omega_{opt} = 2\,(1+[1-\boldsymbol{\rho}^2(\widetilde{B})]^{\frac{1}{2}})^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\rho}^2(\widetilde{B})\ \omega_{opt}^2 = 4(\omega_{opt}-1),$$

οπότε

$$\boldsymbol{\rho}(\widetilde{\mathcal{L}}_\omega) = \omega_{opt} - 1 = (1-[1-\boldsymbol{\rho}^2(\widetilde{B})]^{\frac{1}{2}})\,(1+[\boldsymbol{\rho}^2(\widetilde{B})]^{\frac{1}{2}})^{-1}$$

Γραφικά, το φαινόμενο αποδίδεται από το ακόλουθο σχήμα:



Αποδείξαμε λοιπόν το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.9. ***Έστω ότι ο πίνακας*** A ***είναι ολικά διατεταγμένος, κυκλικός δεύτερης τάξης και τέτοιος ώστε όλοι οι υποπίνακες*** $A_{i,i}$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ ***να είναι αντιστρέψιμοι.***

Η πραγματική τιμή της υπερχαλαρωτικής παραμέτρου ω ***που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα*** $\rho(\tilde{\mathcal{L}}_\omega)$ ***του πίνακα*** $\tilde{\mathcal{L}}_\omega$ ***είναι ίση με:***

$$\omega_{opt} = 2\,(1 + [1 - \rho^2(\tilde{B})]^{\frac{1}{2}})^{-1}. \blacksquare$$

Θα υποθέσουμε τώρα ότι $\omega \in \mathbb{C}$ και θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα.

Προς τούτο, κατ' αρχήν ορίζουμε το ***κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών*** $\pm\tilde{\mu}$ σαν εκείνο το ζεύγος ιδιοτιμών που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη απόλυτη τιμή $|\lambda|$ ιδιοτιμής του πίνακα $\tilde{\mathcal{L}}_\omega$, *για όλα τα* $\omega \in \Omega$.

Ακριβέστερα, εάν $\pm\tilde{\mu}$ είναι το κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών του $\tilde{B}$ και εάν το ζεύγος αυτό απεικονίζεται, μέσω των διαδοχικών μετασχηματισμών $(\mathrm{M1}),(\mathrm{M2})$ και $(\mathrm{M3})$ στο ζεύγος ιδιοτιμών $\tilde{\lambda}_1$ και $\tilde{\lambda}_2$ του $\tilde{\mathcal{L}}_\omega$, τότε:

$$\max\{|\tilde{\lambda}_1|, |\tilde{\lambda}_1|\} \geq \max_{\lambda \in \tilde{\mathcal{L}}_\omega} |\lambda|,$$

για κάθε $\omega \in \Omega$.

Προφανώς, η ύπαρξη ενός κρίσιμου ζεύγους ιδιοτιμών εξαρτάται από την κατανομή των ιδιοτιμών του πίνακα $\tilde{B}$ στο μιγαδικό $\mu-$επίπεδο κι έτσι, γενικά, σε περίπτωση μίας τυχαίας κατανομής, ένα τέτοιο ζεύγος μπορεί να μην υπάρχει.

Ισχύει η ακόλουθη *Πρόταση*:

Πρόταση ΙΙΙ.4.9.10. ***Μία ικανή συνθήκη προκειμένου ένα ζεύγος ιδιοτιμών*** $\pm\mu$ ***του*** $\widetilde{B}$ ***να είναι κρίσιμο συνίσταται στην ιδιότητα του συνόλου των ιδιοτιμών του*** $\widetilde{B}$ ***να αποτελεί μέρος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία*** $-\mu$ ***και*** $+\mu$***.***

Απόδειξη. Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\widetilde{B}$ βρίσκονται τοποθετημένες πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $-\mu$ και $+\mu$, τότε, ανεξάρτητα από την τιμή του

$$a = (\omega - 1)^{\frac{1}{2}},$$

η διάταξη των ιδιοτιμών πάνω σε αυτό το τμήμα διατηρείται και μετά από τις επεμβάσεις των διαδοχικών μετασχηματισμών $(\mathrm{M1}), (\mathrm{M2})$ και $(\mathrm{M3})$. ■

Ας υποθέσουμε λοιπόν στην συνέχεια ότι ο πίνακας $\widetilde{B}$ έχει ένα κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών $\pm\widetilde{\mu}$ που αντιστοιχεί στην φασματική ακτίνα $\boldsymbol{\rho}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega}) = |\widetilde{\lambda}(\omega)|$. Το *Πρόβλημα ΙΙΙ.4.8.2* της προηγούμενης *Παραγράφου* μπορεί τότε να επαναδιατυπωθεί συνοψιζόμενο στην αναζήτηση μίας τιμής ω_{opt} της υπερχαλαρωτικής παραμέτρου ω έτσι ώστε:

$$\min_{\omega\in\Omega}\left|\widetilde{\lambda}(\omega)\right| = \left|\widetilde{\lambda}(\omega_{opt})\right| = \boldsymbol{\rho}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega}),$$

όπου Ω είναι ο τόπος σύγκλισης της μεθόδου. Θέτοντας

$$z := \lambda^{\frac{1}{2}},$$

η σχέση $(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda$, όπως αυτή αποδείχθηκε στο *Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.5*, γράφεται ισοδύναμα υπό την μορφή:

$$z^2 = \omega\mu z + \omega - 1 = 0,$$

και επομένως αρκεί να επιλέξουμε τον αριθμό ω_{opt} έτσι ώστε το:

$$\max\{|z_1(\omega_{opt}, \widetilde{\mu})|, |z_2(\omega_{opt}, \widetilde{\mu})|\}$$

να ελαχιστοποιείται. (Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $z_j(\omega, \mu)$ για να αναπαραστήσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \omega\mu z + \omega - 1 = 0$.)

Έχουμε ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε το επόμενο:

Λήμμα ΙΙΙ.4.9.11. ***Έστω η εξίσωση*** $z^2 - \omega\mu z + \omega - 1 = 0$ ***με ρίζες*** $z_j(\omega, \mu)$***, όπου*** ω ***και*** μ ***είναι μιγαδικοί αριθμοί. Η τιμή*** ω_0 του ω***, για την οποία ο αριθμός:***

$$max\{|z_1(\omega, \mu)|, |z_2(\omega, \mu)|\}$$

γίνεται ελάχιστος, χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι ρίζες είναι ίσες:

$$z_1(\omega_0, \mu) = z_2(\omega_0, \mu).$$

Έτσι η βέλτιστη τιμή ω_0 ***του*** ω***, είναι μία ρίζα της εξίσωσης:***

$$\frac{\omega^2\mu^2}{4} = \omega - 1,$$

που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $|\omega - 1|^{\frac{1}{2}}$***.***

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, θα δείξουμε ότι η τιμή ω_0 πρέπει να είναι τέτοια ώστε:

$$|z_1(\omega_0,\mu)|=|z_2(\omega_0,\mu)|.$$

Προς τούτο, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $z_1(\omega,\mu)$ και $z_2(\omega,\mu)$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις του ω.

Για αυτό, σύμφωνα με το *Θεώρημα της Ανοικτής Απεικόνισης* για ολόμορφες συναρτήσεις, μία ανοικτή περιοχή του ω_0 απεικονίζεται σε ανοικτές περιοχές του

$$z_1 = z_1(\omega_0,\mu) \text{ και του } z_2 = z_2(\omega_0,\mu).$$

Εάν τώρα υποθέσουμε (χωρίς απώλεια της γενικότητας) ότι $|z_1|<|z_2|$, τότε είναι πάντα δυνατή η πραγματοποίηση μίας αλλαγής $\omega_0 \to \omega_0'$ έτσι ώστε

$$|z_1'|<|z_2'|<|z_2|.$$

Για αυτόν τον λόγο, πρέπει να ισχύει $|z_1|=|z_2|$, εφ' όσον η τιμή ω_0 ελαχιστοποιεί τον αριθμό $max\{|z_1|,|z_2|\}$.

Έστω τώρα ότι $z_1 = z\,e^{i\phi}$ όπου z είναι κάποιος μιγαδικός αριθμός. Από τις δύο σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = \omega_0\ \mu \text{ και } z_1\ z_2 = \omega_0 - 1$$

απαλείφοντας το ω_0, παίρνουμε:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2\cos\phi}{\mu}.$$

Η γωνία ϕ, που μεταβάλλεται ανάλογα με τις τιμές του ω, είναι ίση με το μισό της γωνίας που σχηματίζουν τα διανύσματα – ρίζες που ικανοποιούν την ισότητα

$$|z_1(\omega,\mu)|=|z_2(\omega,\mu)|.$$

Με κάθε μεταβολή της τιμής της γωνίας ϕ, ο μιγαδικός αριθμός $z+\frac{1}{z}$ διατρέχει μία ευθεία γραμμή του επιπέδου, που διέρχεται από το μηδέν και έχει κλίση ίση με $-Arctg\mu$.

Εάν $|\,|z|<1$ (μπορούμε βέβαια να ενδιαφερθούμε μόνον για αυτήν την περίπτωση), και εάν ο αριθμός

$$z+\frac{1}{z}$$

διατρέχει την πιο πάνω ευθεία, τότε η συνάρτηση $|z|$ φθίνει ενώ η συνάρτηση

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|\,|$$

αυξάνει (: συγκρίνετε με τον μετασχηματισμό $(\mathrm{M2})$) και η $|z|$ ελαχιστοποιείται όταν η

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

μεγιστοποιείται δηλαδή όταν $|\cos\phi|=1$ ή ισοδύναμα

$$z_1=z_2=z.$$

Άρα, η βέλτιστη τιμή ω_0 της παραμέτρου ω πρέπει να επαληθεύει τις δύο σχέσεις:

$$2z=\omega_0\,\mu,\quad z^2=\omega_0-1,$$

οπότε απαλείφοντας το z, παίρνουμε την σχέση:

$$\frac{\omega_0^2\,\mu^2}{4}=\omega_0-1,$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Λήμματος*. ■

Μετά από τα παραπάνω, είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε την γενίκευση του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.9.9* στην περίπτωση όπου η υπερχαλαρωτική παράμετρος *ω* είναι μιγαδικός αριθμός.

Θεώρημα ΙΙΙ.4.9.12. ***Έστω ότι ο πίνακας A είναι ολικά διατεταγμένος, κυκλικός δεύτερης τάξης, και τέτοιος ώστε όλοι οι διαγώνιοι υποπίνακες του $A_{i,i}$ ($i = 1,2,\ldots,N$) να είναι κανονικοί.***

Ας υποθέσουμε, επί πλέον, ότι ο πίνακας $\widetilde{B}$ έχει ένα κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών $\pm\widetilde{\mu}$. Η βέλτιστη τιμή ω_{opt} της παραμέτρου ω, που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega}$ ισούται με:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\widetilde{\mu}^2}}.$$

Τότε, η αντίστοιχη φασματική ακτίνα του $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega_{opt}}$ είναι:

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega_{opt}}) = |\omega_{opt} - 1|. \blacksquare$$

Παρατήρηση ΙΙΙ.4.9.13.(i). Στα *Θεωρήματα ΙΙΙ.4.9.9* και *ΙΙΙ.4.9.12*, υποθέσαμε ότι ο πίνακας A είναι κυκλικός τάξης ίσης με 2.

Η περίπτωση αυτή συναντάται συχνά στις πρακτικές εφαρμογές. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι εάν ο διαμερισμένος σε υποπίνακες πίνακας A είναι κατά υποπίνακες τριδιαγώνιος, τότε ο αντίστοιχα διαμερισμένος πίνακας Jacobi $\widetilde{B}$ είναι ασθενώς $2-$κυκλικός.

Αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται κατά την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων με μερικές παραγώγους με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

(ii). Όταν ο A είναι κυκλικός τάξης 2 και όταν μ είναι μία ιδιοτιμή του $\widetilde{B}$, τότε ο αριθμός μ^2 είναι ιδιοτιμή του $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ και αντίστροφα εάν λ είναι μία μη μηδενική ιδιοτιμή του $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, τότε ο αριθμός $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ είναι μία ιδιοτιμή του $\widetilde{B}$. Επομένως, ισχύει

$$\boldsymbol{\rho}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega_{opt}})=\boldsymbol{\rho}^2(\widetilde{B}). \blacksquare$$

III.4.10. ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ

Στην *Παράγραφο* αυτή θα συζητήσουμε την γενίκευση της υπερχαλαρωτικής μεθόδου, εισάγοντας την ***επιταχυντική υπερχαλαρωτική μέθοδο***, όπως αυτή ανακαλύφθηκε από τον ***Sisler***.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα γραμμικών μιγαδικών εξισώσεων:

$$A \cdot z = \beta \ ,$$

όπου A είναι ένας ολικά διατεταγμένος, $2-$κυκλικός $n \times n$ πίνακας, που είναι τέτοιος ώστε όλοι οι διαγώνιοι υποπίνακές του $A_{i,i}$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ να είναι αντιστρέψιμοι και όπου β είναι ένα δοθέν διάνυσμα με n μιγαδικές συνιστώσες $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Εάν ο διαμερισμένος πίνακας A είναι της μορφής:

$$A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{pmatrix},$$

τότε θεωρούμε τον, κατά υποπίνακες, διαμερισμένο διαγώνιο πίνακα:

$$\widetilde{D}=\begin{pmatrix} A_{1,1} & & & \mathrm{O} \\ & A_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & A_{N,N} \end{pmatrix},$$

και τους κατά υποπίνακες γνήσια τριγωνικούς πίνακες:

$$\widetilde{E}=-\begin{pmatrix} \mathrm{O} & & & \mathrm{O} \\ A_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N-1} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \widetilde{F}=-\begin{pmatrix} \mathrm{O} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & A_{N-1,N} \\ & \mathrm{O} & & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

Προφανώς, $A=\widetilde{D}-\widetilde{E}-\widetilde{F}$.

Η επιταχυντική υπερχαλαρωτική μέθοδος ορίζεται από τους *Τύπους*:

$$z^{(\nu+1)}=(1-\tau)\cdot z^{(\nu)}+\omega\cdot\widetilde{L}\cdot z^{(\nu-1)}+(\tau-\omega)\cdot\widetilde{L}\cdot z^{(\nu)}+\tau\cdot\widetilde{U}\cdot z^{(\nu)}+\tau\cdot\widetilde{c}\quad(\nu=0,1,\dots),$$

όπου $\widetilde{L}:=\widetilde{D}^{-1}\cdot\widetilde{E}\cdot$, $\widetilde{\mathrm{U}}:=\widetilde{\mathrm{D}}^{-1}\cdot\widetilde{F}$ και $\widetilde{c}:=\widetilde{D}^{-1}\cdot\beta$, και όπου τα ω και τ είναι μιγαδικές παράμετροι με $\tau\neq 0$.

Εάν θέσουμε

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega} := \left(\mathrm{I} - \omega \cdot \widetilde{L}\right)\left[(1-\tau)\cdot \mathrm{I} + (\tau - \omega)\cdot \widetilde{L} + \tau \cdot \widetilde{U}\right] = \mathrm{I} - \tau \cdot (\mathrm{I} - \omega.\widetilde{L})^{-1} \cdot \widetilde{D}^{-1} \cdot A$$

και

$$\widetilde{\Lambda}_{\omega} := (\mathrm{I} - \omega \cdot \widetilde{L})^{-1} \cdot \widetilde{D}^{-1} \cdot A,$$

τότε η παραπάνω μέθοδος γράφεται υπό την μορφή:

$$z^{(\nu+1)} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega} \cdot z^{(\nu)} + \tau \cdot (\mathrm{I} - \omega \cdot \widetilde{L})^{-1} \cdot \widetilde{c} \quad (\nu = 0,1,\ldots).$$

Προφανώς, όταν $\omega = 0$, η μέθοδος εκφυλίζεται στην μέθοδο Jacobi, ενώ όταν $\omega = 1$, η μέθοδος ισοδυναμεί με την μέθοδο Gauss-Seidel. Ακόμη, όταν $\omega = \tau$ η μέθοδος ταυτίζεται με την υπερχαλαρωτική μέθοδο.

Αξίζει να σημειωθεί πως, με εξαίρεση την πρώτη επανάληψη, το αριθμητικό κόστος που απαιτείται για την διεκπεραίωση μίας πλήρους επιταχυντικής υπερχαλαρωτικής μεθόδου ισοδυναμεί με το συνολικό αριθμητικό κόστος που απαιτείται για την διεκπεραίωση μίας πλήρους επανάληψης στην υπερχαλαρωτική μέθοδο.

Όπως είναι γνωστό, η φασματική ακτίνα **ρ**($\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$) του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$ μπορεί να θεωρείται σαν το ασυμπτωτικό μέτρο της εκτίμησης της ταχύτητας σύγκλισης της ακολουθίας των σφαλμάτων της μεθόδου προς το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{C}^{n}$.

Σε ότι ακολουθήσει θα ασχοληθούμε με την αναζήτηση τρόπων κατάλληλης επιλογής των μιγαδικών παραμέτρων ω και τ προκειμένου η σύγκλιση της επιταχυντικής υπερχαλαρωτικής μεθόδου να είναι επιτυχής.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα εξετάσουμε τα επόμενα δύο βασικά *Προβλήματα*:

Πρόβλημα ΙΙΙ.4.10.1. ***Εάν υποθέσουμε ότι η κατανομή των ιδιοτιμών του διαμερισμένου πίνακα Jacobi:***

$$\widetilde{B} = \widetilde{L} + \widetilde{U}$$

είναι δεδομένη, τότε να προσδιοριστεί ο τόπος Ω ***του*** C^2 ***μέσα στον οποίο ισχύει*** **ρ(**$\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$**)** <1 ***για κάθε*** $(\omega,\tau)\in\Omega$. **(Το σύνολο** Ω **καλείται** ***τόπος σύγκλισης της επιταχυντικής υπερχαλάρωσης*****).**

Πρόβλημα ΙΙΙ.4.10.2. ***Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων, εφόσον υπάρχουν, που είναι βέλτιστες, υπό την έννοια της ελαχιστοποίησης της φασματικής ακτίνας*** **ρ(**$\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$**).**

Προκειμένου να προσδιορίσουμε ένα ευρύ υποσύνολο D του Ω, θα προσφύγουμε σε μία γεωμετρική αναπαράσταση των σχέσεων που υφίστανται μεταξύ των ιδιοτιμών των πινάκων $\widetilde{B},\widetilde{\Lambda}_\omega$ και $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$.

Ας εισάγουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

$$\sigma(\widetilde{B}) = \{\mu : \text{μία ιδιοτιμή του } \widetilde{B}\}.$$

$$\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega) = \{\lambda : \text{μία ιδιοτιμή του } \widetilde{\Lambda}_\omega = (\mathrm{I}-\omega\cdot\widetilde{L})^{-1}\cdot\widetilde{D}^{-1}\cdot A\},$$

$$\sigma(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) = \{\zeta : \text{μμία ιδιοτιμή του } \widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega} = \mathrm{I}-\tau\cdot(\mathrm{I}-\omega\cdot\widetilde{L})^{-1}\cdot\widetilde{D}^{-1}\cdot A\}.$$

Κατ' αρχήν, παρατηρούμε ότι από την ταυτότητα $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega} = \mathrm{I} - \tau \cdot \widetilde{\Lambda}_{\omega}$ συνεπάγεται μία γραμμική σχέση μεταξύ των δύο συνόλων $\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})$ και $\sigma(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega})$: *εάν* λ *είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα* $\widetilde{\Lambda}_{\omega}$, *τότε ο αριθμός:*

$$\zeta = 1 - \tau - \lambda$$

είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$.

Ύστερα, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.9.5*:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.3. ***Εάν*** $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$ ***και ο αριθμός*** λ ***ικανοποιεί την σχέση:***

$$(1 - \lambda^2) = \mu^2 (1 - \lambda\, \omega),$$

τότε $\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})$. ***Αντίστροφα, εάν*** $\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}) - \{0\}$ ***και ο αριθμός*** μ ***ικανοποιεί την παραπάνω σχέση, τότε*** $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$. ■

Είναι φανερό ότι, σύμφωνα με αυτό το *Θεώρημα*, ο διαμερισμένος πίνακας Jacobi $\widetilde{B}$ έχει μόνον ζεύγη ιδιοτιμών: εάν μ είναι μία ιδιοτιμή του $\widetilde{B}$, τότε και ο αριθμός $-\mu$ είναι επίσης ιδιοτιμή του $\widetilde{B}$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι :

$$\omega \in \mathbb{C} - \{0,1\}.$$

Το προηγούμενο *Θεώρημα* περιγράφει μία απεικόνιση μεταξύ των μιγαδικών μ- και $\lambda-$ επιπέδων, η οποία μπορεί να μελετηθεί με την βοήθεια διαδοχικών στοιχειωδών μετασχηματισμών.

Προφανώς, η βασική σχέση του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.10.3* είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$\mu \frac{\omega}{\sqrt{\omega-1}} = \sqrt{\frac{\omega-1}{1-\lambda\,\omega} + \sqrt{\frac{1-\lambda\,\omega}{\omega-1}}}.$$

Θέτοντας:

$$2\,z := \frac{\omega}{\sqrt{\omega-1}}\,\mu \text{ και } \xi := \sqrt{\frac{\omega-1}{1-\lambda\,\omega}}, \qquad (\mathrm{T1})$$

η παραπάνω σχέση εκφράζεται και υπό τις εξής δύο μορφές:

$$z = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) \text{ και } \xi = z + \sqrt{z^2 - 1}. \qquad (\mathrm{T2})$$

Η απεικόνιση που ορίζεται από τις δύο αυτές ισότητες είναι η γνωστή ***συνάρτηση Joukowski***.

Συμβολίζοντας $a := \sqrt{\omega-1}$, η συνάρτηση αυτή γράφεται:

$$z = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\mu. \qquad (\mathrm{T3})$$

Έστω τώρα $\pm\mu$ ένα ζεύγος ιδιοτιμών του πίνακα $\widetilde{B}$. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $(\mathrm{T3})$, το ζεύγος αυτό αντιστοιχεί στα σημεία z^+ και z^-, όπως στο πιο κάτω σχήμα.

Είναι σαφές ότι υπάρχει μία έλλειψη $E_{|a|}$ τέτοια ώστε να περικλείει τα σημεία

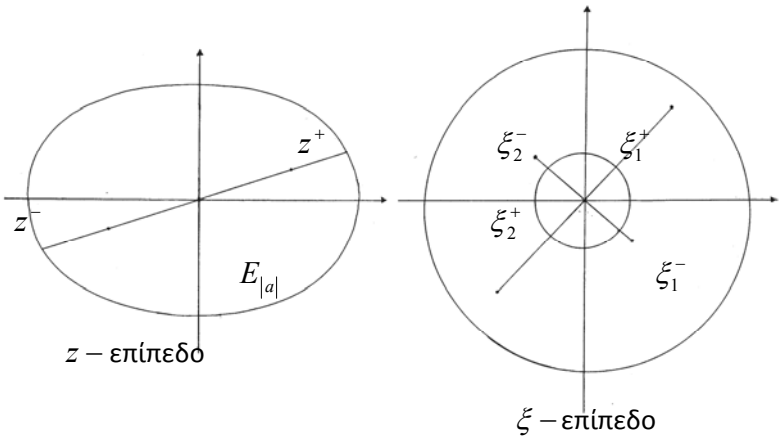
$$z^{+} \text{ και } z^{-}.$$

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $(\mathrm{T2})$, αυτή η έλλειψη απεικονίζεται σε δύο κύκλους

$$|\xi| = |a| \quad \text{και} \quad |\xi| = \frac{1}{|a|} \text{ στο } \xi - \text{επίπεδο},$$

ενώ το εσωτερικό της απεικονίζεται επί του δακτυλίου

$$|a| < |\xi| < \frac{1}{|a|} \text{ στο } \xi - \text{επίπεδο } (|a| < 1):$$



Επειδή η δεύτερη εξίσωση που περιγράφει τον μετασχηματισμό $(\mathrm{T1})$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\xi^2 - \xi^2 \lambda \omega = \omega - 1$, έπεται ότι:

$$\lambda = \frac{1}{\omega} + \frac{\omega - 1}{\omega} \frac{1}{\xi^2},$$

κι επομένως:

$$|a| \le |\xi| \le \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow \frac{|\omega-1|^2}{|\omega|} \le \left|\lambda - \frac{1}{\omega}\right| \le \frac{1}{|\omega|},$$

που σημαίνει ότι οι δύο κύκλοι $|\xi| = |a|$ και $|\xi| = \frac{1}{|a|}$ του $\xi-$επιπέδου απεικονίζονται στους δύο κύκλους

$$\left|\lambda - \frac{1}{\omega}\right| = \frac{1}{|\omega|} \quad \text{και} \quad \left|\lambda - \frac{1}{\omega}\right| = \frac{|\omega-1|^2}{|\omega|}$$

του $\lambda-$επιπέδου, αντίστοιχα, και ότι ο δακτύλιος

$$|a| < |\xi| < \frac{1}{|a|}$$

του $\xi-$επιπέδου απεικονίζεται επί του δακτυλίου:

$$\frac{|\omega-1|^2}{|\omega|} < \left|\lambda - \frac{1}{\omega}\right| < \frac{1}{|\omega|}$$

του $\lambda-$επιπέδου.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την πρώτη απαντητική απόπειρα στο *Πρόβλημα ΙΙΙ.4.10.1*:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.4. ***Εάν οι παράμετροι ω και τ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε:***

$$0 < |\omega - 1| < 1 \quad \text{και} \quad \Delta(\frac{1}{\omega}, \frac{1}{|\omega|}) \subset \Delta(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{|\tau|}),$$

τότε η επιταχυντική υπερχαλαρωτική μέθοδος συγκλίνει **(κάτω από την όχι περιοριστική παραδοχή ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\widetilde{B}$ περιέχονται στο εσωτερικό της έλλειψης $E(\sqrt{\omega - 1})$ που έχει ημιάξονες:**

$$\frac{\left| \frac{1}{|\sqrt{\omega - 1}|} \pm |\sqrt{\omega - 1}| \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{\omega - 1}} + \sqrt{\omega - 1} \right|}$$

και της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας σχηματίζει γωνία:

$$\phi = Argtg\left\{ \frac{1 - |\sqrt{\omega - 1}^2|}{1 + |\sqrt{\omega - 1}|^2} \; tg(Arg\sqrt{\omega - 1}) \right\}$$

με τον πραγματικό ημιάξονα του μ – επιπέδου.) Εδώ ο συμβολισμός:

$$\Delta(a, r)$$

πάλι αναπαριστά τον ανοικτό δίσκο που έχει κέντρο το σημείο a και ακτίνα ίση με r.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $(\mathrm{T3})$, κάθε εσωτερικό σημείο της έλλειψης $E(\sqrt{\omega-1})$ στο $\mu-$επίπεδο απεικονίζεται στο εσωτερικό της έλλειψης $E_{|\sqrt{\omega-1}|}$ στο $z-$επίπεδο η οποία έχει ημιάξονες τις δύο ευθείες:

$$\frac{1}{2}\left|\left|\sqrt{\omega-1}\right|\pm\left|\sqrt{\omega-1}\right|^{-1}\right|.$$

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $(\mathrm{T2})$, κάθε εσωτερικό σημείο της έλλειψης $E_{|\sqrt{\omega-1}|}$ στο $z-$επίπεδο απεικονίζεται σε δύο σημεία του δακτυλίου

$$(|\omega-1|^2/|\omega|)<|\lambda-(1/\omega)|<(1/|\omega|)$$

στο $\lambda-$επίπεδο.

Έτσι, εάν $E(\widetilde{B})\subset E(\sqrt{\omega-1})$, τότε:

$$\frac{|\omega-1|^2}{|\omega|}<\left|\lambda-\frac{1}{\omega}\right|<\frac{1}{|\omega|}\qquad\forall\lambda\in E(\widetilde{\Lambda}_\omega).$$

Ειδικότερα, θα ισχύει ότι:

$$E(\widetilde{\Lambda}_\omega)\subset\Delta(\frac{1}{\omega},\frac{1}{|\omega|})\subset\Delta(\frac{1}{\tau},\frac{1}{|\tau|}),$$

που σημαίνει ότι $|1-\tau\,\lambda|<1$, για κάθε $\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)$.

Από το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.3*, έπεται ότι:

$$|\zeta|<1\quad\forall\zeta\in\sigma(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}),$$

σχέση που εγγυάται ότι **ρ**$(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega})<1$ και συνεπώς ολοκληρώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*.■

Επειδή ο εγκλεισμός

$$\Delta((1/\omega),(1/|\omega|)) \subset \Delta((1/\tau),(1/|\tau|))$$

μπορεί να εκλαμβάνεται και σαν συσχετισμός: $\omega = k\,\tau \quad (k \geq 1)$, το προηγούμενο *Θεώρημα* μπορεί να οδηγήσει και στο ακόλουθο:

Πόρισμα III.4.10.5. ***Εάν η παράμετρος*** ω ***ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος III.4.10.4, και εάν:***

$$\tau = \frac{\omega}{k} \text{ για κάποιο } k \in [1,+\infty[,$$

τότε **ρ**$(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega})<1$. ■

Στην συνέχεια, εάν $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$, θα συμβολίζουμε με U^{-1} το σύνολο:

$$\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : z^{-1} \in U\}.$$

Θεώρημα III.4.10.6. ***Εάν:***

$$0 < |\omega - 1| < 1 \text{ και } \tau \in \omega\,\overline{\Delta(2,1)} - \overline{\Delta(1,1)}\,\Delta^{-1}((1/\omega),(1/|\omega|)),$$

η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης συγκλίνει **(κάτω από την προϋπόθεση ότι όλες οι**

ιδιοτιμές του πίνακα $\widetilde{B}$ ανήκουν στο εσωτερικό της έλλειψης $E(\sqrt{\omega-1})$).

Απόδειξη. Όπως στην *Απόδειξη* του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.10.4*, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι:

$$|1-\omega\,\lambda|<1, \qquad \forall\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}).$$

Ας επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο (ζ,u^{-1}) μέσα στο σύνολο

$$\overline{\Delta(1,1)}\times\Delta^{-1}(1/\omega,1/|\omega|).$$

Θέτοντας

$$\tau=\omega\,(1+\zeta)-\zeta\,u^{-1},$$

βλέπουμε εύκολα ότι εάν $\zeta=0$ τότε $\tau=\omega$, διαφορετικά το σημείο

$$s:=1+(\omega-\tau)\,(u^{-1}-\omega)^{-1}$$

ανήκει στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,1)}$, δηλαδή

$$s=(1-\tau\,u)\,(1-\omega\,u)^{-1}\in\overline{\Delta(0,1)}.$$

Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$|1-\tau\,\lambda|\le|1-\omega\,\lambda|, \quad \forall\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}).$$

Συνεπώς, ισχύει και:

$$|\zeta| < 1, \quad \forall \zeta = 1 - \tau\lambda \in \sigma(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}),$$

που ολοκληρώνει την *Απόδειξη*. ■

Θα δούμε τώρα πως η αναζήτηση του τόπου σύγκλισης Ω μπορεί να ανεξαρτητοποιηθεί από την Θεωρία των Σύμμορφων Απεικονίσεων και να συνδεθεί με μία στοιχειώδη αλγεβρική διαχείριση, έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε έναν θεωρητικό προσδιορισμό του Ω.

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.7. ***Για κάθε*** $\omega \in \mathbb{C}$, ***θέτουμε:***

$$\lambda_\omega := \max\{|\lambda|^{-2}\,(-|\lambda| - \mathrm{Im}\lambda) : \lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)\}$$

και

$$\widetilde{\lambda}_\omega := \min\{|\lambda|^{-2}\,(|\lambda| - \mathrm{Im}\lambda) : \lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)\},$$

και θεωρούμε το ανοικτό σύνολο:

$$S_\omega := \{y \in \mathbb{R} : \lambda_\omega < y < \widetilde{\lambda}_\omega\}$$

καθώς και το υποσύνολό του:

$$F_\omega = \{y \in S_\omega : \max_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - (|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2}$$

$$< \min_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{\mathrm{Re}\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 - (|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2}\}.$$

Εάν

$$G := \{\omega \in \mathbb{C} : F_\omega \neq \varnothing\},$$

τότε ο τόπος σύγκλισης Ω ***της επιταχυντικής μεθόδου υπερχαλάρωσης είναι:***

$$\Omega = G \times \{x + i\, y \in \mathbb{C} : y \in F_\omega, \omega \in G \quad \text{και}$$

$$\max_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - (|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2} <$$

$$x < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{\mathrm{Re}\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 - (|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2}\}.$$

Απόδειξη. Έστω $(\omega, \tau) \in \Omega$.

Όπως είδαμε πιο πάνω, αυτό σημαίνει ότι

$$|1 - \tau\, \lambda| < 1,$$

για κάθε $\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)$.

Θέτοντας $\tau := x + i\, y$ και $\lambda := a + i\, \beta$, η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την ακόλουθη:

$$(a^2 + \beta^2)\, x^2 - (2\, a)\, x + (y^2\, [a^2 + \beta^2] + 2\, y\, \beta) < 0\,,$$

ή ακόμα με το ακόλουθο σύστημα των δύο ανισοτήτων:

$$\left[\begin{array}{l} a^2-(a^2+\beta^2)\,[(a^2+\beta^2)\,y^2+2\,y\,\beta]>0 \\ \text{και} \\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-(a^2+\beta^2)\,[(a^2+\beta^2)\,y^2+2\,y\,\beta]}}{a^2+\beta^2} \\ \qquad\qquad < x < \dfrac{a+\sqrt{a^2-(a^2+\beta^2)\,[(a^2+\beta^2)\,y^2+2\,y\,\beta]}}{a^2+\beta^2} \end{array}\right]$$

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η πρώτη ανισότητα του συστήματος ισχύει για κάθε $(a+i\,\beta)\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)$ εάν και μόνον εάν $y\in S_\omega$ και ότι οι επόμενες δύο ανισότητες του συστήματος ισχύουν για κάθε $(a+i\,\beta)\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)$ εάν και μόνον εάν $y\in F_\omega$ και:

$$\max_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)}\frac{\mathrm{Re}\lambda-\sqrt{|\lambda|^2-(|\lambda|^2\;y+\mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2} < x < \min_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)}\frac{\mathrm{Re}\lambda+\sqrt{|\lambda|^2-(|\lambda|^2\;y+\mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2}\,. \blacksquare$$

Οι υποθέσεις του πιο πάνω *Θεωρήματος* μοιάζουν να είναι πολύ τεχνικές, όμως, από την άλλη πλευρά η *Απόδειξη* αυτού του *Θεωρήματος* γενικεύεται, και η εμβέλειά της καλύπτει και την απάντηση που αναζητούμε στο πρόβλημα των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων ω και τ.

Προς το παρόν, ας παρουσιάσουμε μία άμεση συνέπεια του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.10.7*:

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.8. ***Εάν η παράμετρος*** $\omega\in C$ ***επιλεγεί έτσι ώστε:***

$$\mathrm{Re}\,\lambda>0 \;\textbf{\textit{για κάθε}}\; \lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega),$$

και εάν η παράμετρος $\tau = x + i\, y \in \mathbb{C}$ ***ικανοποιεί τις σχέσεις:***

$$0 < y < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{|\lambda| - \mathrm{Im}\lambda}{|\lambda|^2} \quad \textbf{\textit{και}} \quad 0 < x < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{\mathrm{Re}\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 - (|\lambda|^2\ y + \mathrm{Im}\lambda)^2}}{|\lambda|^2},$$

τότε

$$(\omega, \tau) \in \Omega. \ \blacksquare$$

Ας στραφούμε τώρα προς την μελέτη των ειδικών περιπτώσεων:

$$\omega = 0 \ \text{ και } \ \omega = 1.$$

Όταν $\omega = 0$, η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης εκφυλίζεται στην μέθοδο Jacobi:

$$x^{(\nu+1)} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,0} \cdot x^{(\nu)} + \tau \cdot c = [\mathrm{I} - \tau \cdot \widetilde{\Lambda}_0] \cdot x^{(\nu)} + \tau \cdot c \qquad (\nu = 0,1,\ldots).$$

Από το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.3*, έπεται ότι εάν $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$ τότε

$$\lambda = (1 \pm \mu) \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_0),$$

αλλά και αντιστρόφως, εάν $\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_0)$, τότε

$$\mu = \pm(1 - \lambda) \in \sigma(\widetilde{B}).$$

Έτσι:

$$\boldsymbol{\rho}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,0}) < 1 \Leftrightarrow |\zeta|^2 = |1 - \tau\,(1 \pm \mu)|^2 < 1, \quad \forall \mu \in \sigma(\widetilde{B})$$

$$\Leftrightarrow [1-\tau\,(1\pm\mu)]\,[1-\bar{\tau}\,(1\pm\bar{\mu})]$$
$$=1-\bar{\tau}\,(1\pm\bar{\mu})-\tau\,(1\pm\mu)+|\,\tau\,|^2\,|\,1\pm\mu\,|^2$$

$$=1-2\,\mathrm{Re}[\tau\,(1\pm\mu)]+\{\mathrm{Re}[\tau\,(1\pm\mu)]\}^2+\{\mathrm{Im}[\tau\,(1\pm\mu)]\}^2$$
$$=\{\mathrm{Re}[\tau\,(1\pm\mu)]-1\}^2+\{\mathrm{Im}[\tau\,(1\pm\mu)]\}^2<1,\quad \forall\mu\in\sigma(\widetilde{B}),$$

και έχουμε αποδείξει το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.9. ***Εάν*** $\omega=0$ ***και*** $\pm 1\notin\sigma(\widetilde{B})$, ***τότε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης να συγκλίνει είναι η ισχύς της επόμενης ανισότητας:***

$$\{\mathrm{Re}[\tau\,(1\pm\mu)]-1\}^2<1-\{\mathrm{Im}[\tau\,(1\pm\mu)]\}^2$$ ***για κάθε*** $\mu\in\sigma(\widetilde{B})$.■

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.10. ***Ας υποθέσουμε ότι*** $\sigma(\widetilde{B})\subset]-1,1[$. ***Εάν*** $\omega=0$ ***και εάν για κάθε*** $\mu\in\sigma(\widetilde{B})$ ***ισχύει:***

$$0<\tau<\frac{2}{1\pm\mu},$$

η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης συγκλίνει. ■

Όταν $\omega=1$, η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης ταυτίζεται με την μέθοδο Gauss-Seidel:

$$x^{(v+1)} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,1} \cdot x^{(v)} + \tau \cdot (\mathrm{I} - L)^{-1} \cdot c = [\mathrm{I} - \tau \cdot \widetilde{\Lambda}_1] \cdot x^{(v)} + \tau \cdot (\mathrm{I} - L)^{-1} \cdot c \quad (v = 0,1,\ldots).$$

Από το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.3* έπεται ότι εάν $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$ τότε

$$\lambda = (1 - \mu^2) \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_1),$$

αλλά και αντιστρόφως, εάν $\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_1)$ τότε υπάρχει $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$ τέτοιο ώστε

$$\lambda = 1 - \mu^2.$$

Έτσι:

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,1}) < 1 \Leftrightarrow |\zeta|^2 = \left|1 - \tau \cdot (1 - \mu^2)\right|^2 < 1, \quad \forall \mu \in E(\widetilde{B})$$

$$\Leftrightarrow [1 - \tau\,(1 - \mu^2)]\,[1 - \overline{\tau}\,(1 - \overline{\mu}^2)]$$

$$= 1 - 2\,\mathrm{Re}[\tau\,(1 - \mu^2)] + \{\mathrm{Re}[\tau\,(1 - \mu^2)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[\tau\,(1 - \mu^2)]\}^2$$

$$= \{\mathrm{Re}[\tau\,(1 - \mu^2)] - 1\}^2 + \{\mathrm{Im}[\tau\,(1 - \mu^2)]\}^2 < 1, \quad \forall \mu \in \sigma(B).$$

και έχουμε αποδείξει το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.11. ***Εάν***

$$\omega = 1 \text{ και } \pm 1 \notin \sigma(\widetilde{B}),$$

τότε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης να συγκλίνει είναι η ισχύς της επόμενης ανισότητας:

$$\left\{\mathrm{Re}\left[\tau\left(1 - \mu^2\right)\right] - 1\right\}^2 < 1 - \left\{\mathrm{Im}\left[\tau\left(1 - \mu^2\right)\right]\right\}^2$$

για κάθε $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$. ■

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.12. ***Ας υποθέσουμε ότι***

$$\sigma(\widetilde{B}) \subset]-1,1[.$$

Εάν $\omega = 1$ ***και εάν για κάθε*** $\mu \in \sigma(\widetilde{B})$ ***ισχύει:***

$$0 < \tau < \frac{2}{1-\mu^2},$$

τότε η επιταχυντική μέθοδος υπερχαλάρωσης συγκλίνει. ■

Στην συνέχεια και μέχρι το τέλος της *Παραγράφου*, θα ασχοληθούμε με το *Πρόβλημα ΙΙΙ.4.10.2*.

Αρχίζουμε με ένα γενικό πρόβλημα μιγαδικής βελτιστοποίησης:

Έστω $U \neq \varnothing$ ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$ και έστω

$$u_1, u_2, \ldots, u_m,\ v_1, v_2, \ldots, v_m$$

ολόμορφες μη σταθερές συναρτήσεις του U τέτοιες ώστε:

$$u_j^2(t) \neq 4\, v_j(t) \qquad (t \in U,\ j = 1,2,\ldots,m).$$

Εάν κάθε εξίσωση

$$z^2 + u_j(t)\, z + v_j(t) = 0 \quad (t \in U,\ j = 1,2,\ldots,m)$$

έχει ρίζες

$$z_j(u_j(t), v_j(t)) \text{ και } z_j'(u_j(t), v_j(t)),$$

και θα δείξουμε ότι η τιμή t_0 του $t \in U$ (εάν υπάρχει), στην οποία η συνάρτηση:

$$f(t) := \max\{|z_1(u_1(t),v_1(t))|,|z_1'(u_1(t),v_1(t))|,\ldots \\ \ldots,|z_m(u_m(t),v_m(t))|,|z_m'(u_m(t),v_m(t))|\}$$ γίνεται

ελάχιστη, χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι οι απόλυτες τιμές των ριζών είναι ίσες μεταξύ τους.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.13. ***Εάν υπάρχει ένα*** $t_0 \in U$ ***τέτοιο ώστε*** $f(t_0) \le f(t)$ ***για κάθε*** $t \in U$ ***, τότε:***

$$|z_1(u_1(t_0),v_1(t_0))| = |z_1'(u_1(t_0),v_1(t_0))| = \ldots \\ \ldots = |z_m(u_m(t_0),v_m(t_0))| = |z_m'(u_m(t_0),v_m(t_0))|.$$

Απόδειξη. Προφανώς οι συναρτήσεις:

$$h_{2j-1}(u_j(t),v_j(t)) = z_j(u_j(t),v_j(t)) \quad \text{και} \quad h_{2j}(u_j(t),v_j(t)) = z_j'(u_j(t),v_j(t))$$

είναι ολόμορφες ως προς την μεταβλητή $t \in U$, για κάθε j.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σημείο $t_0 \in U$ τέτοιο ώστε:

$$f(t_0) \le f(t) \tag{1}$$

για κάθε $t \in U$.

Επί πλέον, ας δεχθούμε ότι:

$$|h_\beta(u_\mathrm{b}(t_0),v_\mathrm{b}(t_0))| < |h_a(u_\mathrm{a}(t),v_\mathrm{a}(t))|, \tag{2}$$

για κάποια:

$$a, \beta \quad \text{με } a \neq \beta \quad (a = 1,2,...,2m \text{ και } \beta = 1,2,...2m),$$

και κάποια b, a τέτοια ώστε:

$$\mathrm{b} \in \left\{\frac{\beta}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right\}, \quad \mathrm{a} \in \left\{\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right\}.$$

Από την ιδιότητα της συνέχειας των συναρτήσεων $h_\beta(u_\mathrm{b}(t), v_\mathrm{b}(t))$ και $h_a(u_\mathrm{a}(t), v_\mathrm{a}(t))$, είναι σαφές ότι υπάρχει μία ανοικτή περιοχή $V_{t_0} \subset U$ του σημείου t_0 μέσα στην οποία ισχύει:

$$|h_\beta(u_\mathrm{b}(t), v_\mathrm{b}(t))| < |h_a(u_\mathrm{a}(t), v_\mathrm{a}(t))| \qquad (3)$$

$(t \in V_{t_0})$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο σημείο $\tilde{t} \in V_{t_0}$ τέτοιο ώστε

$$|h_a(u_\mathrm{a}(\tilde{t}), v_\mathrm{a}(\tilde{t}))| < |h_a(u_\mathrm{a}(t_0), v_\mathrm{a}(t_0))|.$$

Προς τούτο, ας υποθέσουμε ότι:

$$|h_a(u_\mathrm{a}(t_0), v_\mathrm{a}(t_0))| < |h_a(u_\mathrm{a}(t), v_\mathrm{a}(t))| \qquad (4)$$

για όλα τα σημεία $t \in V_{t_0}$.

Από την ανισότητα (2), έπεται ότι $h_a(u_\mathrm{a}(t_0), v_\mathrm{a}(t_0)) \neq 0$ και έτσι από την ανισότητα (4) συνεπάγεται ότι:

$$h_a(u_\mathrm{a}(t), v_\mathrm{a}(t)) \neq 0 \qquad \forall t \in V_{t_0}.$$

Σύμφωνα με την *Αρχή του Ελαχίστου* για τις ολόμορφες συναρτήσεις, αλλά και σύμφωνα με την ανισότητα (4), η συνάρτηση:

$$h_a(u_{\mathrm{a}}(t), v_{\mathrm{a}}(t))$$

πρέπει να είναι σταθερή μέσα στην ανοικτή περιοχή V_{t_0}.

Μία εφαρμογή του *Θεωρήματος της Ταυτότητας* για τις ολόμορφες συναρτήσεις δείχνει ότι η ολόμορφη συνάρτηση:

$$h_a(u_{\mathrm{a}}(t), v_{\mathrm{a}}(t))$$

πρέπει να είναι σταθερή μέσα στο ανοικτό συνεκτικό σύνολο *U*.

Αυτό όμως είναι άτοπο και επομένως, υπάρχει ένα σημείο $\tilde{t} \in V_{t_0}$ τέτοιο ώστε:

$$|h_a(u_{\mathrm{a}}(\tilde{t}), v_{\mathrm{a}}(\tilde{t}))| < |h_a(u_{\mathrm{a}}(t_0), v_{\mathrm{a}}(t_0))| \qquad (5)$$

Ο συνδυασμός των ανισοτήτων (3) και (5) οδηγεί στις ανισότητες:

$$|h_\beta(u_{\mathrm{b}}(\tilde{t}), v_{\mathrm{b}}(\tilde{t}))| < |h_a(u_{\mathrm{a}}(\tilde{t}), v_{\mathrm{a}}(\tilde{t}))| < |h_a(u_{\mathrm{a}}(t_0), v_{\mathrm{a}}(t_0))|,$$

που αντιτίθενται στην ανισότητα (1).

Άρα, το σημείο $t_0 \in U$ πρέπει να ικανοποιεί τις ισότητες:

$$|h_\beta(u_{\mathrm{b}}(t_0), v_{\mathrm{b}}(t_0))| = |h_a(u_{\mathrm{a}}(t_0), v_{\mathrm{a}}(t_0))|,$$

για κάθε $a = 1,2,...2m$, κάθε $\beta = 1,2,...,2m$ και $\mathrm{b} \in \left\{\frac{\beta}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right\}, \mathrm{a} \in \left\{\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right\}$.. Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* είναι πλήρης. ■

Είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε το πρόβλημα προσδιορισμού βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους της επιταχυντικής υπερχαλάρωσης.

Ας υποθέσουμε ότι $(\omega,\tau)\in\Omega$, δηλαδή ότι **ρ**($\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$) <1. Επί πλέον, ας υποθέσουμε ότι:

$$\omega \notin \left\{\{0,2\}\cup\frac{1}{1-\mu^2}\cdot]\infty,-4]:\mu\in\sigma(\widetilde{B})-\{\pm 1\}\right\}.$$

Αυτή η υπόθεση εγγυάται ότι:

$$(\omega\,\mu^2-4\,\omega+4)\notin]-\infty,0]\quad\forall\mu\in\sigma(\widetilde{B}),$$

και κατά συνέπεια η έκφραση:

$$\sqrt{(2-\omega\,\mu^2)-4(1-\mu^2)}=\sqrt{\omega\,\mu^2-4\,\omega+4}=\exp(\frac{1}{2}Log[\omega\,\mu^2-4\,\omega+4)])$$

είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη ως προς την μεταβλητή ω, για κάθε ιδιοτιμή μ του διαμερισμένου πίνακα Jacobi $\widetilde{B}$.

Έστω $\zeta\in E$ ($\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$).

Επειδή $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}=\mathrm{I}-\tau\,\widetilde{\Lambda}_{\omega}$, ο μιγαδικός αριθμός:

$$\lambda=\frac{1-\zeta}{\tau} \qquad (6)$$

είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{\Lambda}_{\omega}$ και, σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.3*, κάθε ρίζα μ της εξίσωσης:

$$(1-\lambda)^2=\mu^2\,(1-\lambda.\omega) \qquad (7)$$

είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $\widetilde{B}$.

Λόγω της (6), η εξίσωση (7) γίνεται:

$$\zeta^2 - (\tau\,\omega\,\mu^2 - 2\tau + 2)\zeta + (\tau\,\omega\,\mu^2 - 2\tau + 1 + \tau^2 - \tau^2\,\mu^2) = 0 \qquad (8)$$

Έτσι, εάν

$$\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$$

είναι το σύνολο $E(\widetilde{B})$ όλων των ιδιοτιμών του $\widetilde{B}$, τότε, για κάθε $j = 1,2,\ldots,m$, έχουμε:

$$\zeta^2 + u_j(\omega,\tau)\zeta + v_j(\omega,\tau) = 0 \qquad (9)$$

με:

$$u_j(\omega,\tau) = -(\tau\,\omega\,\mu_j^2 - 2\tau + 2) \text{ και } v_j(\omega,\tau) = -(\tau\,\omega\,\mu_j^2 - 2\tau + 1 + \tau^2 - \tau^2\,\mu_j^2).$$

Οι ρίζες κάθε εξίσωσης (9) είναι:

$$\zeta_j(u_j(\omega,\tau)), v_j(\omega,\tau)) = 1 - \tau\,(\frac{2 - \omega\,\mu_j^2 - \mu_j\sqrt{\omega\,2\,\mu_j^2 - 4\,\omega + 4}}{2}).$$

και

$$\zeta'_j(u_j(\omega,\tau)), v_j(\omega,\tau)) = 1 - \tau\,(\frac{2 - \omega\,\mu_j^2 - \mu_j\sqrt{\omega\,2\,\mu_j^2 - 4\,\omega + 4}}{2}).$$

Μία εφαρμογή του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.10.13* σε κάθε ανοικτή συνεκτική συνιστώσα U του συνόλου:

$$\Omega - \left\{ (\omega,\tau) \in \mathbb{C}^2 : \omega \in \{0,2\} \cup \frac{1}{1-\mu^2} \cdot]-\infty,-4] : \mu \in \sigma(\widetilde{B}) - \{\pm 1\} \right\},$$

οδηγεί στο ακόλουθο:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.14. ***Εάν το σημείο:***

$$(\omega_0,\tau_0) \in \Omega - \left\{ (\omega,\tau) \in \mathbb{C}^2 : \omega \in \{0,2\} \cup \frac{1}{1-\mu^2} \cdot]-\infty,-4] : \mu \in \sigma(\widetilde{B}) - \{\pm 1\} \right\}.$$

ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα **ρ**($\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$) ***του πίνακα*** $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$***, τότε πρέπει να ισχύει:***

$$\left| 1 - \tau_0 \left(\frac{2 - \omega_0 \mu_j^2 + \sqrt{\omega_0^2 \mu_j^2 - 4\omega_0 + 4}}{2} \right) \right| = \left| 1 - \tau_0 \left(\frac{2 - \omega_0 \mu_j^2 + \sqrt{\omega_0^2 \mu_i^2 - 4\omega_0 + 4}}{2} \right) \right|$$

για κάθε $\mu_j, \mu_i \in \sigma(\widetilde{B})$**.** ■

Αυτό το αποτέλεσμα είναι καθαρά θεωρητικό.

Εντούτοις, στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, θα εξετάσουμε την πιθανότητα ύπαρξης μίας βέλτιστης τιμής (ω_0,τ_0) του $(\omega,\tau) \in \Omega$, που ελαχιστοποιεί την φασματική ακτίνα **ρ**($\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$) του πίνακα $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$.

Θέτουμε:

$$\lambda_{2j-1}(\omega) := \frac{2-\omega\mu_j^2-\sqrt{\omega^2\mu_j^2-4\omega+4}}{2})$$

και

$$\lambda_{2j}(\omega) := \frac{2-\omega\mu_j^2-\sqrt{\omega^2\mu_j^2-4\omega+4}}{2})$$

για κάθε $j=1,2,\ldots,m$.

Αν υποθέσουμε ότι το ζεύγος (ω_0,τ_0) αποτελεί μία βέλτιστη τιμή για την επιταχυντική μέθοδο υπερχαλάρωσης, τότε, σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.14*, πρέπει να ισχύει:

$$\left|\frac{1-\tau_0.\lambda_a(\omega_0)}{1-\tau_0.\lambda_\beta(\omega_0)}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{(1/\lambda_a(\omega_0))-\tau_0}{(1/\lambda_\beta(\omega_0))-\tau_0}\right| = \left|\frac{\lambda_\beta(\omega_0)}{\lambda_a(\omega_0)}\right| \qquad (10)$$

για κάθε $a=1,2,\ldots,2m$ και κάθε $\beta=1,2,\ldots,2m$.

Είναι φανερό πως κάθε εξίσωση (10) αναπαριστάνει κύκλο $C(H_{a,\beta}(\omega_0),R_{a,\beta}(\omega_0))$ με:

* κέντρο το σημείο $H_{a,\beta}(\omega_0) = \dfrac{|\lambda_a(\omega_0)|^2\,\lambda_\beta(\omega_0)^2-|\lambda_\beta(\omega_0)|^2\,\lambda_a(\omega_0)}{|\lambda_a(\omega_0)|^2\,\lambda_\beta(\omega_0)\,\lambda_a(\omega_0)-|\lambda_\beta(\omega_0)|^2\,\lambda_a(\omega_0)\,\lambda_\beta(\omega_0)}$
* και ακτίνα

$$R_{a,\beta}(\omega_0) = \frac{|\lambda_a(\omega_0)-\lambda_\beta(\omega_0)|}{\left||\lambda_a(\omega_0)|^2|\lambda_\beta(\omega_0)|^2\right|}.$$

Με άλλα λόγια, έχουμε το εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.15. ***Το σημείο*** $(\omega_0, \tau_0) \in C^2$ ***είναι μία βέλτιστη τιμή για την επιταχυντική μέθοδο υπερχαλάρωσης εάν και μόνον εάν το*** τ_0 ***ανήκει στην τομή των κύκλων*** $C(H_{a,\beta}(\omega_0), R_{a,\beta}(\omega_0))$:

$$\tau_0 \in \bigcap_{a,\beta=1}^{2m} C(H_{a,\beta}(\omega_0), R_{a,\beta}(\omega_0)). \blacksquare$$

Να σημειωθεί ότι η αναλυτική έκφραση της εξίσωσης (10) για τον κύκλο

$$C(H_{a,\beta}(\omega_0), R_{a,\beta}(\omega_0))$$

είναι η ακόλουθη:

$$\tau_1^2 + 2\tau_1 \{\mathrm{Re} H_{a,\beta}(\omega_0)\} + \tau_2^2 - 2\tau_2 \{\mathrm{Im} H_{a,\beta}(\omega_0)\} + |H_{a,\beta}(\omega_0)|^2 = R_{a,\beta}^2(\omega_0)$$

με $\tau = \tau_1 + i\tau_2$.

Σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.15*, η αναζήτηση των βέλτιστων τιμών (ω_0, τ_0) για την επιταχυντική μέθοδο υπερχαλάρωσης προϋποθέτει την κατανόηση των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιεί η παράμετρος ω_0 και οι οποίες πρέπει να εγγυώνται την κοινή τομή τ_0 των κύκλων

$$C(H_{a,\beta}(\omega_0), R_{a,\beta}(\omega_0)).$$

Τα δύο τελευταία *Θεωρήματα* μας δημιουργούν την υποψία ότι η ύπαρξη βέλτιστης τιμής (ω_0, τ_0) εξαρτάται ευθέως από τον τρόπο που κατανέμονται οι ιδιοτιμές του πίνακα $\widetilde{B}$ στο $\mu-$επίπεδο.

Είναι εύλογο να σκεφτούμε ότι, σε περίπτωση μίας τυχαίας κατανομής των ιδιοτιμών του $\widetilde{B}$, μία τέτοια βέλτιστη τιμή μπορεί ακόμα και να μην υπάρχει.

Με την εκτίμηση αυτή συμπνέει και το επόμενο *Θεώρημα*, μέσα από το οποίο καθίσταται φανερή η ευχέρεια επιλογής των παρεμβαλλόμενων παραμέτρων *ω* και *τ*, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται (στην γενική περίπτωση) μία "αυθαίρετα καλή" συμπεριφορά σύγκλισης της επιταχυντικής μεθόδου. Η *Απόδειξη* του *Θεωρήματος* αυτού είναι ακριβώς ανάλογη με εκείνη του *Θεωρήματος ΙΙΙ.4.10.*7.

Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.16. ***Έστω*** $\varepsilon > 0$.

Εάν:

$$\omega \in \boldsymbol{C} - \{\frac{1}{1-\mu^2} \cdot]-\infty,-4] : \mu \in \sigma(\widetilde{B}) - \{\pm 1\}\} - \{0,2\},$$

τότε θέτουμε:

$$\lambda_{\omega}^{(\varepsilon)} := \max\{|\lambda|^{-2}\ (-\lambda\,|-\varepsilon\ \mathrm{Im}\lambda) : \lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})\}$$

και

$$\widetilde{\lambda}_{\omega}^{(\varepsilon)} := \min\{|\lambda|^{-2}\,(-\lambda\,|+\varepsilon\,\mathrm{Im}\lambda) : \lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})\}$$

και θεωρούμε το ανοικτό σύνολο:

$$S_{\omega}^{(\varepsilon)} := \{y \in \mathbb{R} : \lambda_{\omega}^{(\varepsilon)} < y < \widetilde{\lambda}_{\omega}^{(\varepsilon)}\}$$

καθώς και το ανοικτό υποσύνολό του:

$$F_{\omega}^{(\varepsilon)} : \{\mathrm{y} \in S_{\omega}^{(\varepsilon)} : \max_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - [\,|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda]^2 - |\lambda|^2\,(1-\varepsilon)^2}}{|\lambda|^2}$$

$$< \min_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - [\,|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda]^2 - |\lambda|^2\,(1-\varepsilon)^2}}{|\lambda|^2}\}.$$

Εάν:

$$G^{(\varepsilon)} := \{\omega \in \mathbb{C} - \frac{1}{1-\mu^2}\cdot]-\infty,-4] : \mu \in \sigma(\widetilde{B}) - \{\pm 1\}\} - \{0,2\} : F_{\omega}^{(\tau)} \neq \varnothing\},$$

τότε για κάθε:

$$(\omega,\tau) \in G^{(\varepsilon)} \times \{x + i\,y \in \mathbb{C} : y \in F_{\omega}^{(\tau)}, \omega \in G_{\omega}^{(\tau)}$$ ***και***

$$\max_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - [\,|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda]^2 - |\lambda|^2\,(1-\varepsilon)^2}}{|\lambda|^2} < x <$$

$$< \min_{\lambda\in\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - [\,|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda]^2 - |\lambda|^2\,(1-\varepsilon)^2}}{|\lambda|^2}\}$$

ισχύει

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) < \varepsilon \,. \blacksquare$$

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.17. *Έστω* $0 < \varepsilon < 2$.

Εάν η παράμετρος $\omega \in \mathbb{C}$ ***επιλεγεί έτσι ώστε:***

$$\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}) \subset \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+}$$

και:

$$(1 + [\frac{\mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda}]^2)\,\varepsilon\,(2-\varepsilon) < 1 \quad (\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}))$$

και εάν η παράμετρος

$$\tau = x + i\,y \in \mathbb{C}$$

είναι τέτοια ώστε:

$$0 < y < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{-\mathrm{Im}\lambda + |\lambda|\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{|\lambda|^2}$$

και:

$$0 < x < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{\mathrm{Re}\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - [\,|\lambda|^2\, y + \mathrm{Im}\lambda]^2 - |\lambda|^2\,(1-\varepsilon)^2}}{|\lambda|^2},$$

τότε

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) < \varepsilon \,. \blacksquare$$

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.18. *Έστω* $\varepsilon > 0$.

Εάν η παράμετρος επιταχυντικής υπερχαλάρωσης $\omega \in \mathbb{C}$ *επιλεγεί έτσι ώστε:*

$$\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}) \subset \mathbb{R}^{+},$$

ενώ η δεύτερη παράμετρος

$$\tau = x + i\,y \in \mathbb{C}$$

είναι τέτοια ώστε:

$$0 < x < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{1}{\lambda} \quad \textit{και} \quad 0 < y < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega})} \frac{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{\lambda},$$

τότε

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) < \varepsilon \,. \blacksquare$$

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.19. *Έστω* $0 < \varepsilon < 2$.

Εάν η παράμετρος επιταχυντικής υπερχαλάρωσης $\omega \in \mathbb{C}$ *επιλεγεί έτσι ώστε:*

$$\sigma(\widetilde{\Lambda}_{\omega}) \subset \mathbb{R}^{+},$$

ενώ η δεύτερη παράμετρος

$$\tau = x + i\,y \in \mathbb{C}$$

είναι τέτοια ώστε:

$$0 < x < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{1}{\lambda} \quad \textbf{και} \quad 0 < y < \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{\lambda},$$

τότε

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) < \varepsilon \,. \blacksquare$$

Εάν, ιδιαίτερα, $\omega = 1$, τότε:

$$\sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega) \subset \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \sigma(\widetilde{B}) \subset]-1, 1[$$

και:

$$\min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{\Lambda}_\omega)} \frac{1}{\lambda} = \min_{\lambda \in \sigma(\widetilde{B})} \frac{1}{1-\mu^2}.$$

Θέτοντας:

$$\underline{\mu} := \min\{\mu : \mu \in \sigma(\widetilde{B}) \subset]-1, 1[,$$

βλέπουμε αμέσως ότι:

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.20. ***Έστω*** $0 < \varepsilon < 2$.

Εάν

$$\sigma(\widetilde{B}) \subset]-1, 1[$$

και εάν ο μιγαδικός αριθμός

$$\tau = x + i\,y \in \mathbb{C}$$

ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$0 < x < \frac{1}{1-\mu^2} \text{ και } 0 < y < \frac{\sqrt{\varepsilon\,(2-\varepsilon)}}{1-\mu^2},$$

τότε

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,l}) < \varepsilon\,.\blacksquare$$

Πόρισμα ΙΙΙ.4.10.21. ***Έστω*** $0 < \varepsilon < 2$.

Εάν

$$\sigma(\widetilde{B}) \subset]-1, 1[$$

και εάν ο μιγαδικός αριθμός $\tau = x + i\,y \in \mathbb{C}$ ***είναι τέτοιος ώστε:***

$$0 < x < 1 \text{ και } 0 < y < \sqrt{\varepsilon.(2-\varepsilon)},$$

τότε

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,l}) < \varepsilon\,.\blacksquare$$

Σύμφωνα με το τελευταίο *Πόρισμα*, ***η μιγαδική Gauss-Seidel μέθοδος μπορεί να έχει αυθαίρετα ικανοποιητική ασυμπτωτική συμπεριφορά.***

Η δυσκολία πρακτικής επαλήθευσης των υποθέσεων των τελευταίων αποτελεσμάτων είναι τέτοια που μας υποχρεώνει να αναζητήσουμε άλλους τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος.

Έτσι, όπως στην προηγούμενη *Παράγραφο*, θα υποθέσουμε ότι ο διαμερισμένος πίνακας Jacobi $\widetilde{B}$ έχει ένα κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών $\pm\widetilde{\mu}$.

Εξ ορισμού, *το κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών* $\pm\widetilde{\mu}$ *του* $\widetilde{B}$ *είναι εκείνο το ζεύγος που αντιστοιχεί στην υπερέχουσα* (κατ' απόλυτη τιμή) *ιδιοτιμή του πίνακα* $\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$, *για οποιαδήποτε* $(\omega,\tau)\in\mathbb{C}^2$.

Κάτω από αυτήν την ισχυρή υπόθεση, ισχύει ότι :

$$\min_{(\omega,\tau)\in\mathbb{C}^2}\boldsymbol{\rho}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega})=\max_{(\omega,\tau)\in\mathbb{C}^2}\{\max\{|\widetilde{\zeta}|,|\widetilde{\zeta}'|\}\},$$

όπου $\widetilde{\zeta}$ και $\widetilde{\zeta}'$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\zeta^2-(\tau\,\omega\,\widetilde{\mu}^2-2\tau+2)\zeta+(\tau\,\omega\,\widetilde{\mu}^2-2\tau+1+\tau^2\,\widetilde{\mu}^2)=0.$$

Σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.4.10.13*, η τιμή (ω_0,τ_0) του ζεύγους (ω,τ) στην οποία η παράσταση:

$$\max\{|\widetilde{\zeta}|,|\widetilde{\zeta}'|\}$$

γίνεται ελάχιστη χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι:

$$|\widetilde{\zeta}|=|\widetilde{\zeta}'|.$$

Θέτοντας:

$$\omega_0:=\frac{2\pm\sqrt{4-4\widetilde{\mu}^2}}{\widetilde{\mu}^2}\ \text{και}\ \tau_0:=\frac{1}{\mp\sqrt{1-\widetilde{\mu}^2}},$$

μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι:

$$\tau_0\,\omega_0\tilde{\mu}^2 - 2\tau_0 + 2 = \tau_0\,\omega_0\,\tilde{\mu}^2 - 2\tau_0 + 1 + \tau_0^2 - \tau_0^2\,\tilde{\mu}^2 = 0,$$

και γιαυτό, σε μία τέτοια περίπτωση, ισχύει $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}' = 0$ που συνεπάγεται ότι:

$$\min_{(\omega,\tau)\in\mathcal{C}^2} \boldsymbol{\rho}(\tilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) = \boldsymbol{\rho}(\tilde{\mathcal{L}}_{\tau_0,\omega_0}) = 0\,.$$

Με άλλα λόγια, έχουμε αποδείξει το εξής:

Θεώρημα III.4.10.22. ***Ας υποθέσουμε ότι ο διαμερισμένος πίνακας Jacobi $\tilde{B}$ έχει ένα κρίσιμο ζεύγος ιδιοτιμών $\pm\tilde{\mu}$.***

Οι βέλτιστες τιμές

$$(\omega_0, \tau_0)$$

των παραμέτρων της επιταχυντικής υπερχαλάρωσης που ελαχιστοποιούν την φασματική ακτίνα του πίνακα $\tilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}$ (και συνεπώς μεγιστοποιούν τον ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης της μεθόδου) είναι:

$$\omega_0 := \frac{2}{1-\sqrt{1-\tilde{\mu}^2}}\,,\ \tau_0 := \frac{1}{-\sqrt{1-\tilde{\mu}^2}}$$

και

$$\omega_0 := \frac{2}{1+\sqrt{1-\tilde{\mu}^2}}\,,\ \tau_0 := \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\mu}^2}}\,.$$

Τότε:

$$\rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau_0,\omega_0}) = \min_{(\omega,\tau)\in C^2} \rho(\widetilde{\mathcal{L}}_{\tau,\omega}) = 0 . \blacksquare$$

Προφανώς, η ύπαρξη ενός κρίσιμου ζεύγους ιδιοτιμών εξαρτάται από τον τρόπο κατανομής του πίνακα $\widetilde{B}$ στο $\mu-$επίπεδο. Ακόμη, στην γενική περίπτωση μίας τυχαίας κατανομής, ένα τέτοιο ζεύγος μπορεί και να μην υπάρχει. Γιαυτό, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ως προς την εξασφάλιση της ύπαρξης ενός κρίσιμου ζεύγους ιδιοτιμών.

III.5. ΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

III.5.1. ΓΕΝΙΚΑ

Έστω ότι δίνεται προς επίλυση το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$A \cdot x = \beta ,$$

όπου:

$$A = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} , \text{ με } a_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall i \ \text{και} \ \forall j ,$$

και όπου:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} , \text{ με } \beta_i \in \mathbb{R} \quad \forall i .$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Η εύρεση της μοναδικής αυτής λύσης ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό της τομής των n επιπέδων που έχουν την ακόλουθη γενική εξίσωση:

$$f_i(x) = f_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j - \beta_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

(Παρατηρήστε πως ο αριθμός

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j$$

είναι ίσος με το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος, που σχηματίζεται από τα στοιχεία της $i-$γραμμής του πίνακα A, πολλαπλασιασμένο με το διάνυσμα:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .)$$

Θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τις δυνατότητες αυτής της ιδέας, δημιουργώντας επίπεδα που υποκαθιστούν τα επίπεδα f_i και προσεγγίζουν την τομή. Έστω λοιπόν ένα τυχαίο διάνυσμα:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Συμβολίζουμε με u^T τον πίνακα $(u_1,\ u_2,\ \ldots\ ,u_n)$. Τότε:

Πόρισμα ΙΙΙ.5.1.1. ***Το επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση:***

$$g^{(u)}(x) = u^T \cdot A \cdot x - u^T \cdot \beta = 0$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i). ***διέρχεται από το διάνυσμα*** ξ ***,***

(ii). ***έχει κανονικοποιημένο το διάνυσμα*** $A^T \cdot u$ ***.***

Απόδειξη. Η ιδιότητα *(i)* είναι άμεση, γιατί, προφανώς, $g^{(u)}(\xi) = 0$.

Όσον αφορά στην ιδιότητα *(ii),* εάν δεχθούμε ότι $x^{(1)}$ και $x^{(2)}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου $g^{(u)}(x) = 0$, τότε, εξ ορισμού, είναι:

$$u^T \cdot A \cdot x^{(1)} - u^T \cdot \beta = 0$$

και:

$$u^T \cdot A \cdot x^{(2)} - u^T \cdot \beta = 0,$$

οπότε, αφαιρώντας κατά μέλη, λαμβάνουμε την σχέση:

$$u^T \cdot A \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) = 0 = (x^{(1)} - x^{(2)})^T \cdot A^T \cdot u,$$

που δείχνει ότι τα διανύσματα $A^T \cdot u$ και $(x^{(1)} - x^{(2)})$ είναι ορθογώνια.

Επειδή τα διανύσματα $x^{(1)}$ και $x^{(2)}$ είναι τυχαία επιλεγμένα επί του επιπέδου $g^{(u)}(\mathrm{x}) = 0$,αποδείξαμε ότι το διάνυσμα $A^T \cdot u$ είναι κανονικοποιημένο στο επίπεδο $g^{(u)}(\mathrm{x}) = 0$. ■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε εντοπίσει μία προσεγγιστική λύση $\xi^{(\nu)}$ του συστήματος $A \cdot x = \beta$.

Ας αντιστοιχίσουμε σ' αυτήν την προσεγγιστική λύση ένα επίπεδο:

$$[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot x - [u^{(\nu)}]^T \cdot \beta = 0,$$

τέτοιο ώστε, για κατάλληλα επιλεγμένο $u^{(\nu)} \in \mathbb{R}^n$, αυτό να διέρχεται από το ξ.

Αν προβάλλουμε *ορθογώνια* το διάνυσμα $\xi^{(\nu)}$ πάνω σ' αυτό το επίπεδο, δηλαδή αν μετατοπίσουμε *παράλληλα* προς το διάνυσμα $A^T \cdot u^{(\nu)}$ έως ότου πέσει πάνω στο επίπεδο, τότε θα λάβουμε ένα διάνυσμα $\xi^{(\nu+1)}$ που θα είναι της μορφής:

$$\xi^{(\nu+1)} = \xi^{(\nu)} + s_\nu \; A^T \cdot u^{(\nu)}.$$

Ας σημειωθεί ότι, επειδή, από κατασκευής, το $\xi^{(\nu+1)}$ ανήκει στο επίπεδο $[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot x - [u^{(\nu)}]^T \cdot \beta = 0$, θα πρέπει να ισχύει:

$$[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot (\xi^{(\nu)} + s_\nu \; A^T \cdot u^{(\nu)}) - [u^{(\nu)}]^T \cdot \beta = 0,$$

κι επομένως ο αριθμός $s_\nu \in \mathbb{R}$ θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$s_\nu = -\frac{[u^{(\nu)}]^T \cdot (A \cdot \xi^{(\nu)} - \beta)}{[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot A^T \cdot u^{(\nu)}} = -\frac{[u^{(\nu)}]^T \cdot (A \cdot \xi^{(\nu)} - \beta)}{\left\| A^T \cdot u^{(\nu)} \right\|^2}.$$

Έτσι, καταλήγουμε στην ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο:

$$\xi^{(\nu+1)} = \xi^{(\nu)} - \frac{\langle u^{(\nu)} / r^{(\nu)} \rangle}{\left\| A^T \cdot u^{(\nu)} \right\|^2} \; A^T \cdot u^{(\nu)} \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots),$$

όπου

$r^{(\nu)}$ ***είναι το διανυσματικό υπόλοιπο*** $A \cdot \xi^{(\nu)} - \beta$

και όπου

$\langle u^{(\nu)} / r^{(\nu)} \rangle$ ***είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος*** $u^{(\nu)}$ ***με το διάνυσμα*** $r^{(\nu)}$**.**

Η επαναληπτική αυτή μέθοδος είναι συγκλίνουσα, γιατί:

$$\left\| \xi^{(\nu+1)} - \xi \right\| \le \left\| \xi^{(\nu)} - \xi \right\| \quad (\nu = 0,1,2,\ldots).$$

(Το σύμβολο $\| \ . \ \|$ αναπαριστά την Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^n$.)

Πράγματι από κατασκευής έχουμε:

$$\xi^{(\nu+1)} - \xi = \xi^{(\nu)} - \xi - \frac{\langle u^{(\nu)} / r^{(\nu)} \rangle}{\left\| A^T \cdot u^{(\nu)} \right\|^2} \; A^T \cdot u^{(\nu)}.$$

Όμως, καθώς το διάνυσμα $A^T \cdot u^{(\nu)}$ είναι ορθογώνιο προς το διάνυσμα $\xi^{(\nu+1)} - \xi$, η *Ανισότητα Schwarz* εκφυλίζεται σε ισότητα, γιαυτό και, από την προηγούμενη σχέση, έπεται ότι:

$$\left\| \xi^{(\nu+1)} - \xi \right\|^2 = \left\| \xi^{(\nu)} - \xi \right\|^2 - \frac{\langle u^{(\nu)} / r^{(\nu)} \rangle^2}{\left\| A^T \cdot u^{(\nu)} \right\|^2},$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$\left\| \xi^{(\nu+1)} - \xi \right\| \le \left\| \xi^{(\nu)} - \xi \right\|.$$

Οι διάφορες επαναληπτικές μέθοδοι προβολής διαφοροποιούνται από τις ποικίλες επιλογές του διανύσματος $u^{(v)}$. Ας δώσουμε δύο παραδείγματα:

Παράδειγμα ΙΙΙ.5.1.2. ***Επιλέγουμε:***

$$u^{(v)} = \frac{\xi^{(v)}}{\left\|\xi^{(v)}\right\|}.$$

Τότε, η μέθοδος δίνεται από τον Τύπο:

$$\xi^{(v+1)} = \xi^{(v)} - \frac{\langle \xi^{(v)} / A \cdot \xi^{(v)} \rangle - \langle \xi^{(v)} / \beta \rangle}{\left\| A^T \cdot \xi^{(v)} \right\|^2} \; A^T \cdot \xi^{(v)}. \blacksquare$$

Παράδειγμα ΙΙΙ.5.1.3. ***(Μέθοδος του Kacmarz)*** ***Έστω*** i ***ο δείκτης που είναι τέτοιος ώστε:***

$$i = v + 1 \textbf{\textit{ (modulo } } n \textbf{\textit{).}}$$

Επιλέγουμε:

$$u^{(v)} = e^{(i)},$$

όπου $e^{(i)}$ ***είναι το i-διάνυσμα της κανονικής βάσης του*** $\mathbb{R}^n$***:***

$$e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i - \text{γραμμή}$$

Τότε, η αντίστοιχη επαναληπτική μέθοδος προβολής διαμορφώνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\xi^{(v+1)} = \xi^{(v)} - r_i^{(v)} \frac{A^T \cdot e^{(i)}}{\left\| A^T \cdot e^{(i)} \right\|^2},$$

όπου $r_i^{(v)}$ ***είναι η i-συνιστώσα του διανυσματικού υπολοίπου:***

$$r_i^{(v)} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \; \xi_j^{(v)} - \beta_i \; .\blacksquare$$

III.5.2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΓΙΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Από εδώ και στο εξής θα ενδιαφερόμαστε για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων:

$$A \cdot x = \beta \;\; x \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^n : \beta^T = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

όπου *ο πίνακας* $A=(a_{i,j})=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ *είναι κανονικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος*, δηλαδή τέτοιος ώστε:

$$A^T = A \quad \text{και} \quad u^T \cdot A \cdot u > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Θα παρουσιάσουμε, σε αυτήν την περίπτωση, μία διαφορετική απόδοση του προβλήματος.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $F(x)$, που ορίζεται από την εξίσωση:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^T \cdot A \cdot x - x^T \cdot \beta \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Πρόκειται για μία τετραγωνική μορφή ως προς τις συνιστώσες $x=(x_1,\ldots,x_n)$:

$$F(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}\, x_j - \sum_{i=1}^n x_i\, \beta_i .$$

Στην πραγματικότητα, αυτή η τετραγωνική μορφή είναι η εξίσωση μίας κωνικής υπερεπιφάνειας.

Θεώρημα ΙΙΙ.5.2.1. ***Το σημείο*** $\xi \in \mathbb{R}^n$***, που είναι η μοναδική λύση του συστήματος*** $A \cdot x = \beta$ ***είναι το κέντρο συμμετρίας μίας από τις κωνικές υπερεπιφάνειες*** Q_k ***που έχουν εξίσωση:***

$$F(x)=k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Απόδειξη. Έστω $x^{(0)}$ ένα τυχαίο σημείο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, και έστω $u \in \mathbb{R}^n$.

Το σημείο:

$$x = x^{(0)} + t \cdot u$$

βρίσκεται πάνω στην υπερεπιφάνεια Q_k εάν και μόνον εάν ο αριθμός t ικανοποιεί την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το t:

$$\frac{1}{2}\cdot(x^{(0)}+t\cdot u)^T\cdot A\cdot(x^{(0)}+t\cdot u)-(x^{(0)}+t\cdot u)^T\cdot\beta=k$$

ή την, μετά από πράξεις, ισοδύναμή της εξίσωση:

$$\frac{1}{2}t^2\cdot u^T\cdot A\cdot u+\frac{1}{2}t\cdot\left(\ u^T\cdot A\cdot x^{(0)}+[x^{(0)}]^T\cdot A\cdot u-2\cdot u^T\cdot\beta\ \right)$$
$$+\frac{1}{2}\cdot[x^{(0)}]^T\cdot A\cdot x^{(0)}-[x^{(0)}]^T\cdot\beta-k=0\,.$$

Επειδή

$$\left[x^{(0)}\right]^T\cdot A\cdot u=(u^T\cdot A^T\cdot x^{(0)})^T=u^T\cdot A\cdot x^{(0)}$$

(αφού $A^T=A$), η τελευταία γίνεται:

$$\frac{1}{2}t^2\cdot u^T\cdot A\cdot u+t\cdot u^T\cdot\left(A\cdot x^{(0)}-\beta\right)+F\left(x^{(0)}\right)-k=0\,.$$

Καθώς ο πίνακας A είναι κανονικός και το σημείο $x^{(0)}$ είναι τυχαίο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $x^{(0)}$ είναι το μοναδικό σημείο που επιλύει την εξίσωση

$$A\cdot x=\beta\,,$$

δηλαδή μπορούμε να δεχθούμε ότι το $x^{(0)}$ ταυτίζεται με την λύση ξ του συστήματος

$$A\cdot x=\beta\,.$$

Έχοντας κάνει αυτήν την παραδοχή, η προηγούμενη εξίσωση διαθέτει δύο ρίζες:

$$t=\pm\frac{\sqrt{2\left[k-F\left(x^{(0)}\right)\right]}}{u^T\cdot A\cdot u}\,.$$

(Παρατηρήστε ότι, από την υπόθεση, ισχύει $u^T\cdot A\cdot u\neq 0$.) Άρα, υπάρχουν δύο σημεία της μορφής:

$$x=x^{(0)}+t\cdot u$$

που βρίσκονται πάνω στην υπερεπιφάνεια Q_k.

Είναι, επί πλέον, φανερό ότι τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς το $\xi(=x^{(0)})$.

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο ξ είναι πράγματι το κέντρο συμμετρίας, διαπίστωση που περατώνει την *Απόδειξη* του *Θεωρήματος*. ■

Παρατήρηση ΙΙΙ.5.2.2. Σύμφωνα με την *Απόδειξη* αυτή, είναι:

$$F(x^{(0)}) = F(\xi) = \frac{1}{2}\cdot\xi^T\cdot A\cdot\xi - \xi^T = \frac{1}{2}\cdot\xi^T\cdot A\cdot\xi - \xi^T\cdot A\cdot\xi,$$

γιατί $\beta = A\cdot\xi$.

Άρα:

$$F\left(x^{(0)}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\xi^T\cdot A\cdot\xi < 0$$

και συνεπώς, εάν $k>0$, οι δύο τιμές του t προέκυψαν στην παραπάνω απόδειξη είναι πραγματικοί αριθμοί, και αυτό για κάθε $u\in\mathbb{R}^n-\{0\}$.

Έτσι, εάν $k>0$, τότε η επιφάνεια Q_k είναι σίγουρα ένα υπερελλειψοειδές. ■

Θεώρημα ΙΙΙ.5.2.3. ***Έστω u ένα τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n-\{0\}$ και έστω r το αντίστοιχο διανυσματικό υπόλοιπο:***

$$r = A\cdot u - \beta.$$

Τότε, το r έχει την ίδια διεύθυνση με αυτήν του κανονικοποιημένου διανύσματος στο υπερελλειψοειδές που περνάει από το u.

Απόδειξη. Εάν $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)^T$ και $r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)^T$ τότε, επειδή

$$F(u)=\frac{1}{2}\cdot u^T\cdot A\cdot u-u^T\cdot\beta,$$

θα είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}=\frac{1}{2}\cdot\left(u^T\cdot A\right)_j+\frac{1}{2}\cdot\left(A\cdot u\right)_j-\beta_j=\left(A\cdot u-\beta\right)_j=r_j\quad\left(j=1,2,\ldots,n\right),$$

οπότε οι συνιστώσες του διαστήματος r είναι οι παράμετροι διεύθυνσης του κανονικοποιημένου διανύσματος στο σημείο $F(u)$.

Άρα, ισχύει:

$$r(x)=grad\,F(x),$$

και η *Απόδειξη* είναι πλήρης. ■

Θεώρημα III.5.2.4. ***Όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε το πρόβλημα της εύρεσης της λύσης του συστήματος***

$$A\cdot x=\beta,$$

ισοδυναμεί με το πρόβλημα της εύρεσης του σημείου που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση:

$$F(u)=\frac{1}{2}\cdot x^T\cdot A\cdot x-x^T\cdot\beta.$$

Απόδειξη. Στην εξίσωση:

$$\frac{1}{2}t^2\cdot u^T\cdot A\cdot u+t\cdot u^T\cdot\left(A\cdot x^{(0)}-\beta\right)+F\left(x^{(0)}\right)-k=0$$

της απόδειξης του *Θεωρήματος III.5.2.1*, λαμβάνουμε $x^{(0)}=\xi$, οπότε:

$$\frac{1}{2}t^2\cdot u^T\cdot A\cdot u+F(\xi)-k=0.$$

Επειδή

$$F(x) = k\,,$$

η τελευταία σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

$$F(x) = F(\xi) + \frac{1}{2}\,t^2 \cdot u^T \cdot A \cdot u\,,$$

που σημαίνει ότι ένα σημείο x ελαχιστοποιεί την συνάρτηση F όταν το t ισούται με μηδέν, γιατί $u^T \cdot A \cdot u > 0$.

Θα έχουμε λοιπόν, σε αυτήν την περίπτωση, ότι $x \equiv \xi$, και συνεπώς η F ελαχιστοποιείται στο σημείο ξ. ■

Το *Θεώρημα ΙΙΙ.5.2.4* επιτρέπει τον ορισμό μίας επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης του συστήματος

$$A \cdot x = \beta\,.$$

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο, κατασκευάζουμε το διάνυσμα $x^{(\nu+1)}$ από το διάνυσμα $x^{(\nu)}$, όπως περιγράφεται στην ακόλουθη σχέση:

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot u, \quad (\nu = 0,1,2,\ldots)$$

όπου u είναι ένα τυχαίο διάνυσμα και όπου ο αριθμός $\mu_\nu \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε η τιμή $F(x^{(\nu+1)})$ να καθίσταται ελάχιστη.

Έτσι, καθώς:

$$
\begin{aligned}
F(x^{(\nu+1)}) &= \frac{1}{2}\cdot[x^{(\nu+1)}]^T\cdot A\cdot x^{(\nu+1)} - [x^{(\nu+1)}]^{\mathrm{T}}\cdot\beta \\
&= \frac{1}{2}\cdot[x^{(\nu)}+\mu_\nu\cdot u]^T\cdot A\cdot x^{(\nu+1)} - [x^{(\nu)}+\mu_\nu\cdot u]^T\cdot\beta \\
&= \frac{1}{2}\cdot[x^{(\nu)}]^T\cdot A\cdot x^{(\nu)} + \frac{1}{2}\cdot\mu_\nu\cdot[x^{(\nu)}]^T\cdot A\cdot u + \frac{1}{2}\cdot\mu_\nu\cdot u^T\cdot A\cdot x^{(\nu)} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\mu_\nu^2\cdot u^T\cdot A\cdot u - [x^{(\nu)}]^T\cdot\beta - \mu_\nu\cdot u^T\cdot\beta \\
&= F(x^{(\nu)}) + \frac{1}{2}\mu_\nu^2\cdot u^T\cdot A\cdot u \\
&\qquad + \frac{1}{2}\mu_\nu\cdot\left([x^{(\nu)}]^T\cdot A\cdot u + u^T\cdot A\cdot x^{(\nu)}\right) - \mu_\nu\cdot u^T\cdot\beta,
\end{aligned}
$$

θέτοντας,

όπως προηγουμένως,

$$r^{(\nu)} = A\cdot x^{(\nu)} - \beta,$$

ή ακόμα, πολλαπλασιάζοντας με u^T:

$$u^T\cdot r^{(\nu)} = u^T\cdot A\cdot x^{(\nu)} - u^T\cdot\beta$$

βρίσκουμε ότι:

$$F(x^{(\nu+1)}) = \left(\frac{1}{2}\cdot u^T\cdot A\cdot u\right)\mu_\nu^2 + \left(u^T\cdot r^{(\nu)}\right)\mu_\nu + F\left(x^{(\nu)}\right),$$

κι επειδή αυτό το τριώνυμο ως προς μ_ν ελαχιστοποιείται όταν το μ_ν πάρει εκείνη την τιμή που μηδενίζει την μερική παράγωγο

$$\frac{\partial F}{\partial\mu_\nu},$$

διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός μ_ν πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\mu_\nu\, u^T\cdot A\cdot u = -u^T\cdot r^{(\nu)},$$

ή ακόμη, έτσι ώστε:

$$\mu_\nu = -\frac{u^T \cdot r^{(\nu)}}{u^T \cdot A \cdot u}.$$

Άρα, τελικά, η ακριβής σχέση που εκφράζει την παραπάνω επαναληπτική μέθοδο επίλυσης του συστήματος

$$A \cdot x = \beta,$$

με τον πίνακα A : αντιστρέψιμο και θετικά ορισμένο, αποδίδεται από τον ακόλουθο *Τύπο*:

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot u,$$

με:

u : ***τυχαίο διάνυσμα του*** $\mathbb{R}^n - \{0\}$,

$$\mu_\nu := -\frac{u^T \cdot r^{(\nu)}}{u^T \cdot A \cdot u},$$

$$r^{(\nu)} := A \cdot x^{(\nu)} - \beta \qquad (\nu = 0,1,\ldots).$$

Η τυχαία επιλογή του διανύσματος $u \in \mathbb{R}^n$, δεν απαλλάσσει την μέθοδο από την αναμενόμενη συνέπεια της εξάρτησής του από τα υπόλοιπα μεγέθη που υπεισέρχονται στην διατύπωση του προηγούμενου *Τύπου*.

Αυτό γίνεται φανερό στο εξής:

Θεώρημα ΙΙΙ.5.2.5. ***Τα διανύσματα:***

$$r^{(\nu+1)} \quad \kappa\alpha\iota \quad u$$

είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, βλέπουμε ότι διαδοχικά ισχύουν τα εξής:

$$
\begin{aligned}
u^T \cdot r^{(\nu+1)} &= u^T \cdot (A \cdot x^{(\nu+1)} - \beta) \\
&= u^T \cdot (A \cdot x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot A \cdot u - \beta) \\
&= u^T \cdot ([A \cdot x^{(\nu)} - \beta]) + \mu_\nu \cdot A \cdot u) \\
&= u^T \cdot (r^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot A \cdot u) \\
&= u^T \cdot r^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot u^T \cdot A \cdot u \\
&= u^T \cdot r^{(\nu)} - u^T \cdot r^{(\nu)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Δεδομένου ότι:

$$< r^{(\nu+1)} / u >= u^T \cdot r^{(\nu+1)},$$

η *Απόδειξη* είναι πλήρης. ■

III.5.3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Πραγματοποιούμε μία διατομή δύο διαστάσεων μέσα στον χώρο $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται από τα σημεία $x^{(\nu)}, r^{(\nu)}$ και $x^{(\nu+1)}$.

Οι τομές αυτής της διατομής με τις επιφάνειες

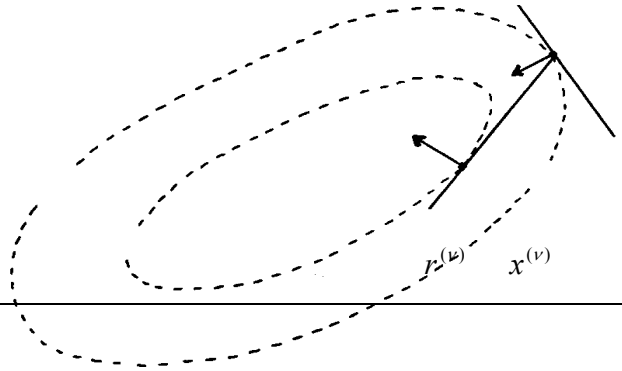
$$F(x) = k \quad (k > 0)$$

συνιστούν μία οικογένεια από ελλείψεις που έχουν όλες το ίδιο κέντρο συμμετρίας $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αποτελέσματα:

- το διάνυσμα $r^{(\nu)}$ είναι κανονικοποιημένο στην θέση $x^{(\nu)}$ της έλλειψης που περνά από αυτό το σημείο και
- το διάνυσμα u είναι εφαπτόμενο στην έλλειψη που περνά από το σημείο $x^{(\nu+1)}$, γιατί το u είναι κανονικοποιημένο στην θέση $r^{(\nu+1)}$.

Μετά από όλα αυτά, μπορούμε να κατασκευάσουμε το επόμενο σχήμα, στο οποίο



αναπαρίσταται η γεωμετρική απόδοση της διαδικασίας που μελετήθηκε στην *Παράγραφο ΙΙΙ.5.2*:

Οι διάφορες μέθοδοι, που εφαρμόζονται στην πράξη, προέρχονται από τις διαφορετικές επιλογές του διανύσματος $u \in \mathbb{R}^n$.

Πριν προχωρήσουμε στην ιδιαίτερη ανάπτυξη τέτοιων μεθόδων στις δύο επόμενες *Παραγράφους*, ας σπεύσουμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις, οι οποίες ενισχύουν το ενδιαφέρον που απορρέει από την μέχρι τώρα θεωρητική μελέτη που προηγήθηκε.

Παρατήρηση ΙΙΙ.5.3.1. Εάν ο πίνακας A του συστήματος

$$A \cdot x = \beta$$

δεν είναι συμμετρικός, τότε μπορούμε να πετύχουμε την αναγωγή του σε συμμετρικό πίνακα πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης $A \cdot x = \beta$ με A^T:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot \beta .$$

Ο δημιουργούμενος πίνακας

$$A^T \cdot A$$

είναι συμμετρικός, και, επί πλέον, έχει όλες του τις ιδιοτιμές πραγματικούς αριθμούς.

Για να είναι ο πίνακας αυτός θετικά ορισμένος αρκεί ο αρχικός πίνακας A να έχει αυτήν την ιδιότητα.

Παρ' όλα αυτά, ο τρόπος αυτός αναγωγής του τυχαίου πίνακα σε συμμετρικό έχει το μειονέκτημα να επιβραδύνει την αποτελεσματικότητα της όλης μεθόδου. ■

Παρατήρηση ΙΙΙ.5.3.2. Το βασικό ενδιαφέρον που προέρχεται από την πολλαπλασιαστική δράση του ανάστροφου πίνακα έγκειται στο γεγονός ότι καθίσταται δυνατή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος που έχει περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους.

Πράγματι, εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας ($m > n$), με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τότε ο ανάστροφός του A^T είναι ένας $n \times m$ πίνακας, και συνεπώς το μεν γινόμενο τους

$$A^T \cdot A$$

είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, το δε γινόμενο $A^T \cdot \beta$ είναι ένα διάνυσμα με n πραγματικές συνιστώσες.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot \beta$$

είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα της εύρεσης του στοιχείου εκείνου του $\mathbb{R}^n$ που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση:

$$G(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x),$$

όπου

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ x_j - \beta_i = 0 \text{ (με } A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \text{)}.$$

Προκειμένου να καταστήσουμε σαφή αυτόν τον ισχυρισμό, επισημαίνουμε ότι το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $G(x)$ ισοδυναμεί με την επίλυση του συστήματος:

$$\left\{ \frac{\partial G}{\partial x_j}(x) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \right\}.$$

Επειδή όμως:

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}(x) = 2 \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

κι επειδή:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\ x_j - \beta_i\,, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{i,j}\,,$$

το παραπάνω σύστημα γράφεται και υπό την μορφή:

$$A^T \cdot (A \cdot x - \beta) = 0\,.$$

Το σύστημα αυτό ονομάζεται ***σύστημα ελαχίστων τετραγώνων***, ενώ η μέθοδος αυτής της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης $G(x)$ ονομάζεται ***μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων***. Η λύση του συστήματος αυτού επιλύει το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της $G(x)$. ■

III.5.4. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΒΑΘΥΤΕΡΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ

Η μέθοδος αυτή έγκειται στην επιλογή:

$$u = r^{(\nu)}\,.$$

Τότε, η επαναληπτική μέθοδος επίλυσης του συστήματος

$$A \cdot x = \beta\,,$$

με τον πίνακα A αντιστρέψιμο, συμμετρικός και θετικά ορισμένο, προσδιορίζεται από τον ακόλουθο *Τύπο*:

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot r^{(\nu)}\,,$$

με:

$$\mu_\nu = -\frac{[r^{(\nu)}]^T \cdot r^{(\nu)}}{[r^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot r^{(\nu)}} = -\frac{\left\| r^{(\nu)} \right\|^2}{[r^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot r^{(\nu)}} \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Για να απλοποιήσουμε τον φόρτο που προκύπτει από τις επανειλημμένες πράξεις, μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό του αριθμού μ_ν σε κάθε επανάληψη: εκτός από τις πρώτες επαναλήψεις, υπολογίζουμε περιοδικά την εκάστοτε τιμή του μ_ν και μετά διατηρούμε την τελευταία τιμή του μ_ν σταθερή μέχρι το τέλος της διαδικασίας.

Η ιδέα αυτή δεν είναι ούτε αυθαίρετη, ούτε αναποτελεσματική. Πράγματι, εάν επιλέξουμε μία τυχαία και σταθερή τιμή μ για το μ_ν, τότε η συνθήκη εκείνη που εγγυάται την σύγκλιση της μεθόδου είναι:

$$\mu > -\frac{2}{\lambda_M},$$

όπου λ_M είναι η ιδιοτιμή του συμμετρικού πίνακα A που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. (Προκειμένου να επαληθεύσουμε αυτόν τον ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι, επειδή:

$$r^{(\nu+1)} = A \cdot x^{(\nu+1)} - \beta = A \cdot (x^{(\nu)} + \mu \cdot r^{(\nu)}) - \beta = (\mathrm{I} + \mu \cdot A) \cdot r^{(\nu)},$$

έχουμε:

$$r^{(k)} = (\mathrm{I} + \mu \cdot A)^k \cdot r^{(0)},$$

με συνέπεια η σύγκλιση της μεθόδου να εξασφαλίζεται όταν η φασματική ακτίνα

$$\boldsymbol{\rho}(\mathrm{I} + \mu \cdot A)$$

του πίνακα $(\mathrm{I} + \mu \cdot A)$ είναι γνήσια μικρότερη του αριθμού 1, ή ακόμα όταν $-1 < 1 + \mu\, \lambda_M < 1$, ή ισοδύναμα όταν $-2 < \mu\, \lambda_M < 0$, δηλαδή όταν:

$$-\frac{2}{\lambda_M} < \mu < 0 .)$$

Από την άλλη πλευρά όμως, δεν είναι εύκολο να βρούμε το λ_M. Το μόνο που μπορούμε να βρούμε χωρίς δυσκολία είναι ένα άνω φράγμα για την φασματική ακτίνα $\boldsymbol{\rho}(A)$ του A, καθώς:

$$\boldsymbol{\rho}(A) \le S_\phi(A) = (\sum_{j=1,i=1}^{n} a_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} =: \beta .$$

Έτσι, μπορούμε κατ' αρχήν να επιλέξουμε:

$$\mu = \frac{2}{\beta} .$$

Εν τούτοις, η καλύτερη επιλογή για το μ είναι εκείνη που καθιστά ελάχιστη την φασματική ακτίνα

$$\boldsymbol{\rho}(\mathrm{I} + \mu \cdot A)$$

δηλαδή εκείνη που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση

$$\max_{1 \le i \le n} |1 + \mu\, \lambda_i|$$

(όπου $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A).

Έτσι, εάν υποθέσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές λ_i του συμμετρικού πίνακα A βρίσκονται μέσα στο κλειστό διάστημα $[a, M]$, με $a > 0$, τότε επειδή:

$$\max_{1 \le i \le n} |1 + \mu\, \lambda_i| \le \max\{|1 + a\,\mu|, |1 + M\,\mu|\}$$

αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση:

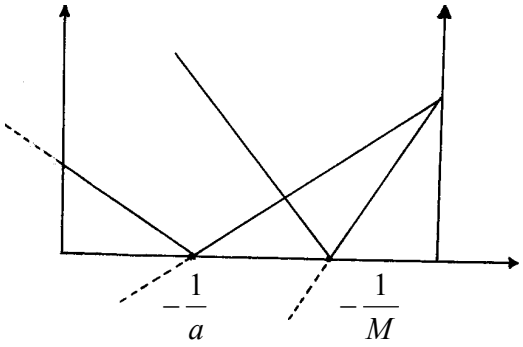
$$u(\mu) \le \max\{|1 + a\,\mu|, |1 + M\,\mu|\}.$$

Όπως φαίνεται και από τις γραφικές αναπαραστάσεις των $|1+a\,\mu|$ και $|1+M\,\mu|$, η τιμή μ_{opt} του μ που ελαχιστοποιεί την $u(\mu)$ πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:

$$1+a\,\mu_{opt} = -\left(1+M\,\mu_{opt}\right),$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\mu_{opt} = -\frac{2}{a\,M}.$$



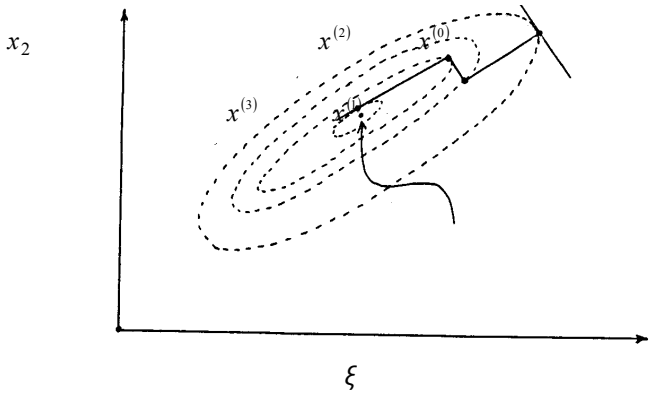
Σχετικά με το πρόβλημα της σύγκλισης της μεθόδου της βαθύτερης καθόδου αναφέρουμε το πιο κάτω ειδικό αποτέλεσμα, του οποίου την *Απόδειξη* παραλείπουμε.

Θεώρημα III.5.4.1. ***Εάν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, συμβολίζουμε με λ_M και λ_m τις ιδιοτιμές που έχουν την πιο μεγάλη και την πιο μικρή απόλυτη τιμή, αντίστοιχα.***

Η μέθοδος της βαθύτερης καθόδου συγκλίνει προς την λύση του συστήματος $A \cdot x = \beta$, κι αυτό για οποιαδήποτε επιλογή του αρχικού διανύσματος $x^{(0)}$, εάν:

$$\frac{\lambda_M}{\lambda_m} < 2 \,. \blacksquare$$

Θα ολοκληρώσουμε την αναφορά μας στην μέθοδο της βαθύτερης καθόδου δίνοντας την γεωμετρική της αναπαράσταση στο ακόλουθο σχήμα:



III.5.5. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΗΣ

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει στην *Παράγραφο III.5.2*, το σύνολο των υπερελλειψοειδών με εξισώσεις

$$F(x) = k$$

έχουν το ίδιο κέντρο συμμετρίας

$$\xi = A^{-1} \cdot \beta$$

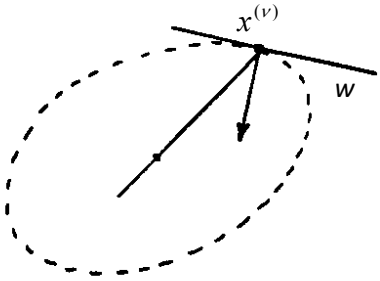
(όπου ο πίνακας A θεωρείται πάντα συμμετρικός, θετικά ορισμένος και αντιστρέψιμος).

Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα *w* που εφάπτεται στην θέση $x^{(\nu)}$ ενός από αυτά τα υπερελλειψοειδή.

Σύμφωνα με το *Θεώρημα ΙΙΙ.5.2.3*, το *w* πρέπει να είναι ορθογώνιο προς το διάνυσμα $r^{(\nu)}$, και συνεπώς θα είναι:

$$0 = w^T \cdot r^{(\nu)} = w^T \cdot (A \cdot x^{(\nu)} - \beta) = w^T \cdot A \cdot \left(x^{(\nu)} - A^{-1} \cdot \beta\right) \Rightarrow 0 = w^T \cdot a \cdot \left(x^{(\nu)} - \xi\right).$$

Παρατηρήστε πως το διάνυσμα *w* εφάπτεται στο υπερελλειψοειδές, ενώ το διάνυσμα



$(x^{(\nu)} - \xi)$ διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας του. Λέμε ότι αυτές *οι δύο διευθύνσεις* είναι ***συζυγείς ως προς το συγκεκριμένο υπερελλειψοειδές***:

Ας θεωρήσουμε τώρα την τομή της οικογένειας όλων αυτών των υπερελλειψοειδών με το επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα $r^{(\nu)}$ και $u^{(\nu-1)}$. (Το τελευταίο αυτό διάνυσμα είναι, όπως έχουμε δει στην *Παράγραφο ΙΙΙ.5.2*, εφαπτόμενο επί του υπερελλειψοειδούς που περνά από το σημείο $x^{(\nu)}$.)

Η παραπάνω ιδιότητα διατηρείται: ***όταν το*** $u^{(\nu)}$ ***είναι ένα διάνυσμα που διέρχεται από το σημείο*** $x^{(\nu)}$ ***και που κατευθύνεται προς το κέντρο του υπερελλειψοειδούς, έχουμε ακόμα μία σχέση της μορφής:***

$$[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot u^{(\nu-1)} = 0. \qquad (11)$$

Όπως προηγουμένως, ορίζουμε την επαναληπτική μέθοδο ως εξής:

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot r^{(\nu)}, \qquad (12)$$

όπου αυτή την φορά διαλέγουμε το διάνυσμα $u^{(\nu)}$ να βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα $u^{(\nu-1)}$ και $r^{(\nu)}$:

$$u^{(\nu)} = -r^{(\nu)} + s_\nu \cdot u^{(\nu-1)}. \qquad (13)$$

Αν μεταφέρουμε αυτήν την τιμή του $u^{(\nu)}$ μέσα στην σχέση (11), θα λάβουμε:

$$\left[-r^{(\nu)} + s_\nu \cdot u^{(\nu-1)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu-1)} = 0 \Rightarrow -r^{(\nu)} \cdot A \cdot u^{(\nu-1)} + s_\nu \cdot \left[u^{(\nu-1)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu-1)} = 0 \Rightarrow$$

$$s_\nu = \frac{\left[-r^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu-1)}}{\left[u^{(\nu-1)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu-1)}} \qquad (14)$$

Η τελευταία αυτή έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί, χάρη στον ορισμό του διανύσματος $r^{(\nu)}$.

Πράγματι, παρατηρήστε πως:

$$r^{(\nu+1)} = A \cdot x^{(\nu+1)} - \beta = A \cdot \left(x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot u^{(\nu)}\right) - \beta \Rightarrow r^{(\nu+1)} = r^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot A \cdot u^{(\nu)}, \qquad (15)$$

και πως, αφού πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη αυτής της ισότητας με

$$\left[u^{(\nu-1)}\right]^T,$$

θα προκύψει:

$$[u^{(\nu-1)}]^T \cdot r^{(\nu+1)} = [u^{(\nu-1)}]^T \cdot r^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot [u^{(\nu-1)}]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)}.$$

Όμως, επειδή τα διανύσματα $u^{(\nu-1)}$ και $r^{(\nu)}$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους κι επειδή η έκφραση

$$[u^{(\nu-1)}]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)}$$

είναι η ανάστροφη της έκφρασης που συμμετέχει στην σχέση (11), από την τελευταία ισότητα συνάγεται ότι:

$$[u^{(\nu-1)}]^T \cdot r^{(\nu+1)} = 0.$$

Έχοντας υπ' όψη ότι, επί πλέον, ισχύει:

$$[u^{(\nu)}]^T \cdot r^{(\nu+1)} = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα $r^{(\nu+1)}$ είναι ορθογώνιο ταυτόχρονα και προς τα δύο διανύσματα $u^{(\nu-1)}$ και $u^{(\nu)}$.

Κατά συνέπεια, το $u^{(\nu)}$ θα είναι επίσης ορθογώνιο προς κάθε διάνυσμα του επιπέδου που ορίζεται από τα $u^{(\nu-1)}$ και $u^{(\nu)}$.

Ειδικότερα, το $r^{(\nu+1)}$ θα είναι ορθογώνιο προς το διάνυσμα $r^{(\nu)}$:

$$[r^{(\nu)}]^T \cdot r^{(\nu+1)} = 0 \qquad (16)$$

Ας επιστρέψουμε τώρα στην εμβόλιμη πρόθεσή μας να απλοποιήσουμε την έκφραση (14) υπολογισμού του λ_v. Ο συνδυασμός των σχέσεων (14) και (15), οδηγεί στην ισότητα:

$$s_v = \frac{\left[r^{(v)}\right]^T \cdot \left(r^{(v)} - r^{(v-1)}\right)}{\left[u^{(v-1)}\right]^T \cdot \left(r^{(v)} - r^{(v-1)}\right)} = \frac{\left[r^{(v)}\right]^T \cdot r^{(v)} - \left[r^{(v)}\right]^T \cdot r^{(v-1)}}{\left[u^{(v-1)}\right]^T \cdot r^{(v)} - \left[u^{(v-1)}\right]^T \cdot r^{(v-1)}}.$$

Αλλά, καθώς

$$[r^{(v)}]^T \cdot r^{(v+1)} = 0 \text{ και } [u^{(v-1)}]^T \cdot r^{(v)} = 0,$$

η τελευταία γίνεται:

$$s_v = \frac{\left[r^{(v)}\right]^T \cdot r^{(v)}}{\left[u^{(v-1)}\right]^T \cdot r^{(v-1)}} = -\frac{\left\| r^{(v)} \right\|^2}{\left[u^{(v-1)}\right]^T \cdot r^{(v-1)}}. \qquad (17)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (13) με $\left[r^{(v)}\right]^T$ έχουμε:

$$\left[r^{(v)}\right]^T \cdot u^{(v)} = -\left[r^{(v)}\right]^T \cdot r^{(v)} + s_v \cdot \left[r^{(v)}\right]^T u^{(v-1)},$$

ή, επειδή $[r^{(v)}]^T \cdot u^{(v-1)} = 0$:

$$[r^{(v)}]^T \cdot u^{(v)} = -\left[r^{(v)}\right]^T \cdot r^{(v)},$$

οπότε η (17) γράφεται και ως εξής:

$$s_v = \frac{\left\| r^{(v)} \right\|^2}{\left\| r^{(v-1)} \right\|^2}. \qquad (18)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την τιμή του αριθμού μ_v, που εμφανίζεται στην σχέση (12).

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (15) με $\left[u^{(v)}\right]^T$ είναι:

$$\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot r^{(\nu+1)} = \left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot r^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot \left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)},$$

και επειδή $[u^{(\nu)}]^T \cdot r^{(\nu+1)} = 0$, βρίσκουμε ότι:

$$\mu_\nu = \frac{\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot \left(r^{(\nu)}\right)}{\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)}} \cdot \mu_\nu \qquad (19)$$

Συνοψίζοντας, και χρησιμοποιώντας τους τύπους $(12), (13), (18)$ και (19), διαπιστώνουμε ότι κάθε επανάληψη της μεθόδου της συζυγούς διαβάθμισης περιλαμβάνει την εξής ακολουθία διαδοχικών υπολογισμών:

$$r^{(\nu)} = A \cdot x^{(\nu)} - \beta, \qquad s_\nu = \frac{\left\| r^{(\nu)} \right\|^2}{\left\| r^{(\nu-1)} \right\|^2},$$

$$u^{(\nu)} = -r^{(\nu)} + s_\nu \cdot u^{(\nu-1)}, \qquad \mu_\nu = -\frac{\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot r^{(\nu)}}{\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)}},$$

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + \mu_\nu \cdot u^{(\nu)}.$$

Παρατήρηση ΙΙΙ.5.5.1. Βλέπουμε ότι προσδιορίζουμε:

- το $u^{(\nu)}$, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι είναι συνεπίπεδο με τα διανύσματα $u^{(\nu-1)}$ και $r^{(\nu)}$

  και χρησιμοποιώντας την συζυγία του με το διάνυσμα $u^{(\nu-1)}$, ιδιότητα που, άλωστε, μας οδηγεί στον υπολογισμό της τιμής του s_ν,

- το μ_ν, έτσι ώστε το διάνυσμα $u^{(\nu)}$ να εφάπτεται επί του υπερελλειψοειδούς στην θέση $x^{(\nu+1)}$.

Έτσι, μπορούμε να ξεκινήσουμε τις επαναλήψεις λαμβάνοντας, παραδείγματος χάρη:

$$u^{(0)} = r^{(0)},$$

και επιλέγοντας ένα τυχαίο διάνυσμα $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Εάν, παραδείγματος χάρη, επιλέξουμε $x^{(0)} = 0$, τότε, αναγκαστικά, θα είναι

$$r^{(0)} = \beta . \blacksquare$$

Θεώρημα III.5.5.2.(Stiefel) ***Έστω $u^{(0)} = r^{(0)}$. Τότε, η μέθοδος της συζυγούς διαβάθμισης συγκλίνει μετά από το πολύ n επαναλήψεις.***

Απόδειξη. Θα δείξουμε, κατ' αρχήν, ότι όλα τα διανύσματα $r^{(\nu)}$ είναι ορθογώνια ανά δύο μεταξύ τους και επί πλέον ότι όλα τα διανύσματα $u^{(\nu)}$ είναι αμοιβαία συζυγή, δηλαδή ότι:

$$[r^{(\nu)}]^T \cdot r^{(\lambda)} = 0 \text{ και } [u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot u^{(\lambda)} = 0 \quad \forall \nu, \lambda \text{ με } \nu \neq \lambda .$$

Ας αρχίσουμε θέτοντας $u^{(0)} = r^{(0)}$, και ας υποθέσουμε ότι οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν μέχρι και την $(k-1)-$επανάληψη.

Θα αποδείξουμε ότι αυτές οι ιδιότητες παραμένουν ισχύουσες ακόμα και κατά την $k-$επανάληψη.

Η σχέση (15) μπορεί να γραφεί και υπό την μορφή:

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} + \mu_{k-1} \cdot A \cdot u^{(k-1)},$$

οπότε, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας με $\left[r^{(k-2)}\right]^T$ προκύπτει ότι:

$$[r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = r^{(k-2)} \cdot r^{(k-1)} + \mu_{k-1} \cdot [r^{(k-2)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-1)} \Rightarrow$$

$$[r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = \mu_{k-1} \cdot [r^{(k-2)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-1)} \qquad (20)$$

Είναι φανερό ότι εάν $k=2$ τότε, καθώς $r^{(0)}=u^{(0)}$, θα έχουμε, σύμφωνα με την σχέση (11), ότι:

$$[r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = 0,$$

ενώ εάν $k>2$ τότε η σχέση (13) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$u^{(k-2)} = -r^{(k-2)} + s_{k-2} \cdot u^{(k-3)} \Leftrightarrow$$

$$r^{(k-2)} = -u^{(k-2)} + s_{k-2} \cdot u^{(k-3)}.$$

Έτσι, αντιστρέφοντας και συνδυάζοντας με την (20), βρίσκουμε ότι:

$$[r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = \mu_{k-1} \cdot \left[-u^{(k-2)} + s_{k-2} \cdot u^{(k-3)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(k-1)}$$

ή

$$[r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = -\mu_{k-1} \cdot [u^{(k-2)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-1)} + \mu_{k-1} \cdot s_{k-2} \cdot [u^{(k-3)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-1)}.$$

Οι δύο όροι στο δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης είναι μηδενικοί, επειδή υποθέσαμε ότι $[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot u^{(\lambda)} = 0 \quad \forall \nu \le k-1,\ \lambda \le k-1$ με $\nu \ne \lambda$

Επομένως, θα ισχύει:

$$[r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = 0. \qquad (21)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό

$$[u^{(k)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)}.$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (13), διαπιστώνουμε πως:

$$[u^{(k)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)} = \left[-r^{(k)} + s_k \cdot u^{(k-1)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)}$$

$$= -[r^{(k)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)} + s_k \cdot [u^{(k-1)}] \cdot A \cdot u^{(k-2)}$$

$$\Rightarrow [u^{(k)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)} = -[r^{(k)}]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)},$$

επειδή υποθέσαμε ότι η σχέση της συζυγίας ισχύει μέχρι και την $(k-1)-$επανάληψη. Όμως, καθώς από την σχέση (15) έχουμε:

$$r^{(k-1)} = r^{(k-2)} + \mu_{k-2} \cdot A \cdot u^{(k-2)} \Rightarrow A \cdot u^{(k-2)} = \frac{1}{\mu_{k-2}} \cdot \left(r^{(k-1)} - r^{(k-2)}\right),$$

καταλήγουμε στην διαπίστωση ότι:

$$\left[u^{(k)}\right]^T \cdot A \cdot u = -\frac{\left[r^{(k)}\right]^T}{\mu_{k-2}} \cdot \left(r^{(k-1)} - r^{(k-2)}\right).$$

Αλλά, με δεδομένο το ότι, σύμφωνα με τις σχέσεις (16) και (21), είναι

$$[r^{(k)}]^T \cdot r^{(k-1)} = 0 \text{ και } [r^{(k-2)}]^T \cdot r^{(k)} = 0$$

αντίστοιχα, συμπεραίνουμε πως:

$$\left[u^{(k)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(k-2)} = 0.$$

Με ανάλογο τρόπο, θα μπορούσε κανείς να αποκομίσει τα ακόλουθα συμπεράσματα:

$$[r^{(k)}]^T \cdot r^{(k-3)} = 0 \text{ και}$$

$$\left[u^{(k)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(k-3)} = 0.$$

Γενικότερα, επαναλαμβάνοντας τα ίδια επιχειρήματα όπως και πιο πάνω, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι σχέσεις:

$$[r^{(\nu)}]^T \cdot r^{(\lambda)} = 0 \text{ και}$$

$$\left[u^{(k)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\lambda)} = 0$$

ισχύουν για οποιεσδήποτε φυσικές τιμές των ν και λ τέτοιες ώστε $\nu \neq \lambda$.

Από το γεγονός ότι τα $(n+1)$ διανύσματα $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ είναι αμοιβαία ορθογώνια και διάφορα μεταξύ τους και από το γεγονός ότι μέσα σ' έναν διανυσματικό χώρο διάστασης ίσης με n είναι αδύνατον να συνυπάρξουν περισσότερα από n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, συνάγουμε, σύμφωνα με την σχέση (16), ότι $r^{(n)} = 0$ και συνεπώς ότι το διάνυσμα $x^{(n)}$ είναι η ακριβής λύση και άρα ότι η μέθοδος συγκλίνει μετά από n επαναλήψεις.■

Παρατήρηση ΙΙΙ.5.5.3. Παρά την θεωρητική πολυτέλεια που παρέχει το *Θεώρημα Stiefel*, κατά τις πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου σε αριθμητικό υπολογιστή δύο ενδεχόμενα μπορούν να συμβούν:

(α). ή να βρεθεί ότι

$$r^{(k)} = 0$$

για κάποιο $k < n$, οπότε σ' αυτήν την (πολύ σπάνια) περίπτωση η μέθοδος θα έχει συγκλίνει πριν από την $n-$οστή επανάληψή της,

(β). ή τα αναγκαστικά σφάλματα στρογγύλευσης να αποτρέπουν την επίτευξη της ισότητας

$$r^{(k)} = 0,$$

για κάποιο k, οπότε σ' αυτήν την (συνηθισμένη) περίπτωση αρκεί να προκαλούμε την συνέχιση των επαναλήψεων της μεθόδου μέχρις ότου μπορέσουμε να πετύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια στην προσεγγιστική λύση. ■

Παρατήρηση ΙΙΙ.5.5.4. Εάν κατορθώσουμε να υπολογίσουμε τα διανύσματα $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ που αντιστοιχούν στον αντιστρέψιμο, συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα A του συστήματος

$$A \cdot x = \beta,$$

τότε μπορούμε, στην συνέχεια, να προσδιορίσουμε την λύση $\tilde{\xi}$ κάθε άλλου συστήματος

$$A \cdot x = d, \text{ με } d \neq \beta.$$

Πράγματι, αρκεί να θέσουμε

$$\tilde{\xi} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \cdot u^{(\lambda)},$$

και να πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη αυτής της ισότητας με $[u^{(\nu)}]^T \cdot A$, οπότε θα σχηματισθεί η ισότητα:

$$\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot \tilde{\xi} = \left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \cdot u^{(\lambda)}$$

Επειδή όμως $[u^{(\nu)}]^T \cdot A \cdot u^{\lambda} = 0 \quad (\forall \nu, \lambda$ με $\nu \neq \lambda)$, η τελευταία γίνεται:

$$\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot \tilde{\xi} = c_\nu \cdot \left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)},$$

και καθώς $A \cdot \tilde{\xi} = d$, βρίσκουμε ότι:

$$c_\nu = -\frac{\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot d}{\left[u^{(\nu)}\right]^T \cdot A \cdot u^{(\nu)}}, \quad \nu = 1,2,\ldots,n. \square$$

Ας σημειωθεί τέλος μία ωραία εφαρμογή αυτής της *Παρατήρησης*: Επιλέγοντας

$$d = e^{(\nu)}$$

όπου $e^{(\nu)}$ είναι το $\nu-$οστό στοιχείο της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} του A, γιατί τότε η λύση $\tilde{\xi}$ θα είναι η $k-$οστή στήλη του πίνακα A^{-1}.■

Βιβλιογραφία

[1] AHO, A.V., HOPCROFT, J.E. and ULLMAN, J.D.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms,* Addison-Wesley, Reading, *Mass.,* 1974.

[2] ΑΠΟΣΤΟΛΑΤΟΣ, Ν.Θ.: *Αριθμητική Ανάλυση,* Τεύχος 1 και 2, 1983.

[3] ATKINSDON, K.E.: *An Introduction to Numerical Analysis (second edition),* John Wiley & Sons, New York, 1989.

[4] BASS, J.: *Cours de Mathématiques,* 1964.

[5] BEREZIN, I.S. and ZHIDKOV, N.P.: *Computing Methods,* Pergamon Press 1965.

[6] BREZINSKI, C.: *Accélération de la Convergence en Analyse Numérique,* Publication 41, Laboratoire de Calcul, Université de Lille I, 1973.

[7] BURDEN, R.L. and FAIRES, J.D.: *Numerical Analysis,* PWS-KENT Publ., Boston, 1993.

[8] CESHINO, F. and KUNTZMANN, J.: *Problémes Différentiels de Conditions Initiales,* Dunod, 1963.

[9] CHATELIN-LABORDE, F.: *Méthodes Numériques de Calcul des Valeurs Propres et Vecteurs Propres d' un Opérateur Linéaire,* Thése, Grenoble, 1971.

[10] COLEMAN, T.F. and C.VAN LOAN: *Handbook for Matrix Computations,* SIAM Publications, Philadelphia, 1988.

[11] CONTE, S.D. and C. de BOOR: *Elementary Numerical Analysis,* 3rd ed., McGraw-Hill, 1980.

[12] DAHLQUIST, G. and BJÖRCK, A.: *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Inc., 1974.

[13] DAVIS, P.J.: *Interpolation and Approximation,* Blaisdell Publ. Comp., 1961.

[14] DENNERY, P and KRZYWICKI, A.: *Mathematics for Physicists,* Harper and Row, 1967.

[15] ΔΙΟΝΥΣΙΟΥ, ΔΗΜ. Δ.: *Μαθηματική Ανάλυση Ι-ΙΙ και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά,* Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1997.

[16] FADDEEVA, N.V.: *Computational Methods of Linear Algebra,* Dover, 1959.

[17] FORSYTHE, G.E., MALCOLM, M.A. and MOLER, C.A.: *Computer Methods for Mathematics Computations,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

[18] FORSYTHE, G.E. and MOLER, C.A.: *Computer Solution of Linear Algebraic Systems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[19] FRÖBERG, G.E.: *Introduction to Numerical Analysis,* 2nd ed., Addison-Wersley, 1969.

[20] GANTMACHER, FR.: *Theorie des Matrices.* Tome 1: Théorie Générale, Dunod.

[21] GASTINEL, N.: *Analyse Numérique Linérique, Hermann,* 1966.

[22] GEORGE, J.A. and LIU, J.W.H.: *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

[23] GERALD, C.F.: *Applied Numerical Analysis,* Addison – Wesley, 1970.

[24] GOLUB, G.H. and C.F.VAN LOAN: *Matrix Computations,* 2nd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.

[25] GUELFOND, A.O.: *Calcul des Différences Finies,* Dunod, 1963.

[26] HACQUES, G.: *Mathématiques pour l' Informatique. 3-Algorithmique Numérique,* Armand Colin, 1971.

[27] HAGEMAN, L.A. and YOUNG, D.M.: *Applied Iterative Methods,* Academic Press, New York, 1981.

[28] HENRICI, P.: *Elements of Numerical Analysis,* Wiley, 1964.

[29] HILDEBRAND, F.B.: *Introduction to Numerical Analysis,* 2nd ed., McGraw-Hill, 1974.

[30] HOUSEHOLDER, A.S.: *The Theory of Matrices in Numerical Analysis,* Blaisdell Publ. Comp., 1964.

[31] HOUSEHOLDER, A.S.: *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation*

[32] ISSACSON, E. and KELLER, H.B.: *Analysis of Numerical Methods,* John Wiley & Sons, New York, 1966.

[33] JOHNSON, L.W. and RIESS, R.D.: *Numerical Analysis,* Addison-Wesley, 1977.

[34] KAHANER, D., MOLER, C. and NASH, S.: *Numerical Methods and Software,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[35] KINCAID, D. and CHENEY, W.: *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing,* Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1991.

[36] KJELLBERG, G.: *On the convergence of successive overrelaxation applied to a class of linear systems of equations with complex eigen-values,* Ericson Technics 2 (1958), σελ. 245-258.

[37] KREDELL, B.: *On complex successive overrelaxation*, BIT 2 (1962), σελ. 143-152.

[38] KUNTZMANN, J.: *Méthodes Numériques, Interpolation, Dérivées,* Dunod, 1959.

[39] LASCOUX, A.: *Interpolation de Lagrange,* Αδημοσίευτη εργασία, 1986.

[40] LAURENT, P.J.: *Etude des Procédés d' Interpolation en Analyse Numérique,* Thése, Grenoble, 1964.

[41] LAURENT, P.J.: *Approximation et Optimisation,* Hermann, 1972.

[42] LEBAUD, C.: *Contribution à l' Etude de l' Algorithme QR,* Thése, Rennes, 1971.

[43] LEGRAND, G.: *Algèbre Linéaire et Multilinéaire et Géométrie Différentielle,* Masson, 1971.

[44] LIONS, J.L.: *Cours d' Analyse Numérique, Ecole Polytechnique,* 1965-1966.

[45] LORENTZ, G.G., M.VON GOLITSCHEK and MAKOVOZ, Y.: *Constructive Approximation: Advanced Problems,* Springer-Verlag, Berlin and New York, 1996.

[46] ΜΙΣΥΡΛΗΣ, Ν.: *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση,* Αθήνα, 1995.

[47] MITCHELL, A.R.: *Computational Methods for Partial Differential Equations,* John Wiley & Sons, London, 1969.

[48] ORTEGA, J.M.: *Numerical Analysis: A Second Course,* Academic Press, 1972.

[49] ORTEGA, J.M. and PHEINBOLDT, W.C.: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, 1970.

[50] PARLETT, B.: *The Symmetric Eigenvalue Problem,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[51] PISOT, C. et ZAMANSKY, M.: *Mathématiques Générales,* Dunod, 1966.

[52] POUZET, P.: *Analyse Numérique,* Publication du Laboratoire de Calcul, Université de Lille I.

[53] PALSTON, A. and RABINOWITZ, P.: *A First Course in Numerical Analysis,* 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.

[54] RAVIART, P.A.: *Cours d' Analyse Numérique,* Université de Paris VI.

[55] SCHWARTZ, L.: *Analyse, Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle,* Hermann, 1970.

[56] STEWART, G.W.: *Introduction to Matrix Computations,* Academic Press, 1973.

[57] STOER, J. and BULIRSCH, R.: *Introduction to Numerical Analysis,* Springer-Verlag, 1980.

[58] STRANG, G.: *Linear Algebra and its Applications,* 2nd ed., Academic Press, 1980.

[59] SZABADOS, J. and VERTESI, P.: *Interpolation of Functions,* World Sci. Publ., London and Singapore, 1990.

[60] SZABADOS, J. and VERTESI, P.: *A survey of mean convergence of interpolatory processses,* J. Comput. Appl. Math. 43 (1992), σελ. 3-18.

[61] THEODOR, R.: *Analyse Numérique,* Editions scientifiques Riber.

[62] VARGA, R.S.: *Matrix Iterative Analysis,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[63] WILKINSON, J.H.: *Rounding Errors in Algebraic Processes,* H.M. Stationery Office, London, 1963.

[64] WILKINSON, J.H.: *The Algebraic Eigevalue Problem,* Clarendon Press, Oxford, 1965.

[65] WOLF, J.: *Méthodes de Calcul des Values Propres d' une Matrice Quelconque par Utilisation de Transformation de Transformations Unitaires,* Thèse, Grenoble, 1971.

[66] ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΣ, Α.: *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση,* Ιωάννινα, 1977.

[67] ΧΑΤΖΗΔΗΜΟΣ, Α.: *Αριθμητική Ανάλυση Ι και ΙΙ,* Ιωάννινα 1978 και 1979.

[68] YOUNG, D.M.: *Iterative Solution of Large Linear Systems,* Academic Press, 1971.

[69] YOUNG, D.M. and GRECORY, R.T.: *A Survey of Numerical Mathematics,* Volumes I and II, Addison Welsey, 1972 and 1973.

[70] ZAMANSKY, M.: *Introduction à l' Algèbre et à l' Analyse Moderne,* Dunod, 1967.